EN UTVECKLINGSARTIKEL PUBLICERAD
FÖR PEDAGOG STOCKHOLM

ATT UNDERVISA MULTIPLIKATION OCH DIVISION MED 10, 100 OCH 1000

LEARNING STUDY I PRAKTIKEN

Författare: Tina Edner
E-post: tina.edner@stockholm.se
Skola: Nya Elementar
Artikelnummer: 19
Granskad: Attila Szabo

STOCKHOLMS STAD

PEDAGOG STOCKHOLM

SAMMANFATTNING

Denna artikel redogör för våra erfarenheter från en Learning study i skolämnet matematik. Vår uppfattning är att många elever har svårt för att enhetsomvandla från exempelvis meter till centimeter och vice versa. Vi tror att för att kunna hantera enhetsomvandling, så behöver eleverna bli säkrare på multiplikation och division med t.ex. talen 10, 100 och 1000. I vår studie ville vi dels synliggöra vilka aspekter som är svåra för eleverna i samband med enhetsomvandling och dels utveckla strategier för en effektivare undervisning. Som metod använde vi Learning study.

Vi fann bland annat att det är av stor vikt att kunna ge eleverna möjlighet att urskilja siffrornas värde i positionssystemet och att resonera om detta med eleverna på ett metodiskt sätt. Vi har också konstaterat att det är viktigt att i undervisningen hålla siffror och deras placering i ett tal konstant och därefter variera decimaltecknets placering – detta för att eleverna ska kunna fokusera på vilken effekt decimaltecknets placering har för siffrans värde. Vi noterar också att siffran 0 bör behandlas mer i undervisningen och att vi lärare inte får ta för givet att eleverna ser på siffran 0 på samma sätt som de ser på övriga siffror. Artikeln vänder sig framförallt till matematiklärare som undervisar på grundskolan, men även till skolledare som är intresserade av att initiera en Learning study.

BAKGRUND

På grundskolan Nya Elementar i Stockholm har matematiklärarna under flera år arbetat med olika metoder för att utveckla sin undervisning. Med stöd av nationella ämnesprov i matematik, prov konstruerade av lärare på skolan och diagnoser i matematik samt genom att ta vara på matematiklärarnas erfarenheter har lärarna kontinuerligt analyserat undervisningens effekter på elevernas prestationer. Analysen visar att eleverna behöver ges möjlighet att bli bättre på att enhetsomvandla. Analysen ledde också till antagandet att om eleverna ska kunna hantera enhetsomvandling, behöver de bli säkrare på multiplikation och division med till exempel 10, 100 och 1000. Vi tror att det är en av nycklarna för att eleverna ska kunna utföra enhetsomvandlingar. Vid ett studiebesök på Sjöstadsskolan blev vi inspirerade av deras arbete med Learning study och bestämde oss för att använda modellen för att utveckla vår undervisning. En närmare beskrivning av metoden Learning study ges i avsnittet som handlar om undersökningens metodik. Vårt *direkta* lärandeobjekt är multiplikation och division med 10, 100 och 1000. Vårt *indirekta* lärandeobjekt är att förstå siffrans värde i ett positionssystem och att förstå vad som händer i decimalsystemet när man utför multiplikation och division med t.ex. 10, 100 och 1000.

Det långsiktiga syftet med att införa Learning study på Nya Elementar är att försöka utveckla en mer professionell skolkultur som kännetecknas av att lärare själva initierar och utvecklar undervisningen på skolan. På vår skola strävar vi efter ett samarbete som inte är begränsat till avgränsade konferenstider utan genomsyrar hela arbetet och underhålls kontinuerligt av lärare på skolan.

MÅL

Vårt huvudsyfte med projektet är att utveckla undervisningen inom området enhetsomvandling. Våra analyser visar att för att eleverna ska bli bättre på enhetsomvandling, så bör de bli bättre på multiplikation och division med tiopotenser. Följaktligen har vi avgränsat lärandeobjektet till multiplikation och division med 10, 100 och 1000. Vi vill också undersöka vad eleverna måste kunna och förstå för att vara säkra när de multiplicerar och dividerar med 10, 100 och 1000.

Studien bidrar ämnesdidaktiskt genom att vi identifierar de så kallade kritiska aspekterna i vår genomförda Learning study. Vi vill belysa betydelsen av att kunna resonera om multiplikation och division med 10, 100 och 1000, för att kunna utföra enhetsomvandlingar. Genom att sprida våra erfarenheter och resultat, hoppas vi kunna bidra med ämnesdidaktisk kunskap inom området samt inspirera andra lärare att använda Learning study som utvecklingsmodell.

METOD

Vår studie är utförd i årskurs 7 i tre olika grupper med 22 elever i varje grupp, tre cykler utfördes. Varje grupp har genomgått en cykel, dvs. en cykel för varje elevgrupp. Den första gruppen genomförde Lektion 1, den andra gruppen Lektion 2 och den tredje gruppen Lektion 3. Grupperna var heterogena och inte indelade i nivåer efter prestation i ämnet. Bland eleverna som genomförde Lektion 1 fanns fler elever som behöver stöd och hjälp i ämnet. Studien involverade fyra lärare, Tina Edner, Sara Fransson, Christina Lidgren och Per Westin, som är utbildade för att undervisa matematik i årskurs 4-9. Vi startade i februari 2013 och slutförde studien i januari 2014.

Vi valde att använda oss av Learning study som metod för att genom ett *variationsteoretiskt* perspektiv dels utveckla undervisningen och dels få eleverna att urskilja det som de ska lära sig. Vi sökte en metod som skulle kunna ge oss djupare förståelse av vad kunskap är som t.ex. vad man kan när man kan enhetsomvandla. Learning study som metod är en cyklisk process där lärarna planerar, reflekterar, utvärderar och omprövar sin lektion tillsammans för att på djupet försöka förstå vilka möjligheter till lärande lektionen gav. Följande moment återkommer under varje cykels gång:

- Förtest av elever
- Analys av förtest
- Planering av lektion
- Genomförande av lektion (som filmas)
- Eftertest av elever efter lektionen
- Analys av lektion och eftertest
- Revision av lektion

Processen upprepas 3-4 gånger per elevgrupp och det är en lektion som står i fokus hela tiden.

Variationsteorin (Marton & Booth, 2000) bygger på att lärande sker med hjälp av urskiljning av nya aspekter. Här tänker man sig inte ett generellt lärande utan ett lärande om ett specifikt innehåll. Denna teoretiska utgångspunkt innebär att man inom en Learning study använder tre begrepp: *lärandeobjekt, kritiska aspekter och mönster av variation.*

Lärandeobjektet är det som skall läras, det är ett mycket avgränsat undervisningsinnehåll. Det gäller att lärarna ställer sig frågor som:

- Vad är det vi vill att eleverna ska kunna?
- Vad innebär det att kunna detta?
- Vad är det man kan när man kan enhetsomvandla?

Enligt Marton och Booth (2000) skiljer man mellan *direkt lärandeobjekt* och *indirekt lärandeobjekt.* Det indirekta lärandeobjektet berör själva lärandet och elevernas behandling av det direkta lärandeobjektet (Marton & Booth, 2000). Elevernas fokus är det direkta lärandeobjektet medan läraren skall fokusera båda objekten (Wernberg, 2009).

Vidare när det gäller lärandeobjektet skiljer man även på det *intentionella*, det *iscensatta* och det *erfarna lärandeobjektet*. Det intentionella lärandeobjektet är det innehåll, som läraren avser att eleverna ska utveckla förståelse om. Det iscensatta lärandeobjektet är det som faktiskt sker i klassrummet och som blir möjligt att betrakta och analysera. Det erfarna lärandeobjektet är i sin tur det som eleven utvecklade under själva lektionen (Holmqvist, 2006). Lärarnas förståelse och behandling av lärandeobjektet och medvetenheten om dess innebörd är centralt för variationsteorin (Wernberg, 2009).

Vad är det eleverna måste kunna för att nå det kunnande som lärandeobjektet innebär? För varje lärandeobjekt finns ett antal aspekter som är avgörande om eleverna ska kunna lära sig lärandeobjektet. Av dessa aspekter gäller det för lärarna att försöka förstå vilka aspekter som är kritiska. För att ta reda på de kritiska aspekterna skapas ett förtest där man ställer frågor och utformar uppgifter som ska leda till att de troliga kritiska aspekterna för lärandeobjektet blir synliga.

När man har funnit sitt avgränsade lärandeobjekt och dess kritiska aspekter, skall lektionen man planerar byggas upp med hjälp av *variationsmönster*. De kritiska aspekterna skall kunna urskiljas i undervisningen och enligt variationsteorin skapar man detta genom att hålla det som varierar mot en konstant bakgrund. Enligt teorin för

Learning study ska en lektion inte behandla fler än tre olika kritiska aspekter och det är viktigt att eleverna urskiljer varje aspekt för sig. I slutet av lektionen utmanas eleverna med uppgifter som innehåller lärandeobjektets alla kritiska aspekter. Detta genomförs för att ge eleverna möjlighet att förstå hur aspekterna hänger ihop. Detta kallas inom variationsteorin för *fusion* (Maunula, Magnusson & Echevarría, 2011).

Vi inventerade potentiella kritiska aspekter i samband med vårt lärandeobjekt och insåg att det fanns alldeles för många kritiska aspekter. Efter det avgränsade vi lärandeobjekten enligt följande kriterier:

- *Direkt* lärandeobjekt: Multiplikation och division med 10, 100 och 1000
- *Indirekt* lärandeobjekt: Att förstå siffrans värde i ett positionssystem och att förstå vad som händer i decimalsystemet när man utför multiplikation och division med t.ex. 10, 100 och 1000

Det ovannämnda avgränsandet ledde till att vi trodde att följande aspekter var kritiska för vårt lärandeobjekt:

- Förståelse för division med 10, 100, 1000 osv.
- Förståelse för multiplikation med 10, 100, 1000 osv.
- Förståelse för positionssystemet, dvs. siffrans värde beroende på position
- Prefixens betydelse

Konstruktion av förtest och eftertest

Vi skapade ett förtest utifrån de avgränsade kritiska aspekterna där vi försökte ställa frågor för att ta reda på hur elever uppfattar t.ex. en siffras position i positionssystemet och vad det innebär för siffrans värde om den multipliceras eller divideras med t.ex. 100. Vi ville även se om de kunde utföra beräkningar i samband med rutinuppgifter, såsom divisionen 0,48/100 eller multiplikationen 10,4 · 100.

Efter att ha analyserat resultaten av förtestet enades vi om följande kritiska aspekter:

- Vad decimaltecknet står för, förståelse för heltal och decimaltal
- Förståelsen för att en position kan bli ”full” och vad det innebär i positionssystemet
- Principerna för positionssystemet gäller på båda sidorna om decimaltecknet
- Förståelse för hur värdet av ett tal förändras vid multiplikation eller division med 10, 100 osv. – att se mönstret vid dessa multiplikationer och divisioner

RESULTAT

Lektion 1 samt variationsmönster som användes i Lektion 1

Lektion 1 planerades och de avgränsade kritiska aspekterna var fokus för undervisningen. I inledningen av lektionen jämfördes heltal med decimaltal genom att skriva talet 321 på tavlan. Vi förde diskussioner i helklass om vad det är som gör att det är ett heltal och inte ett decimaltal. Talet 321,4 togs upp som kontrast så att eleverna skulle få möjlighet att urskilja ett heltal från ett decimaltal. Frågan som eleverna fick var om de kunde ge exempel på några andra heltal och decimaltal – dessa tal skrevs upp på tavlan. Efter det skulle eleverna diskutera hur heltalen kunde göras om till decimaltal. Decimaltecknets betydelse blev sedan själva slutdiskussionen på del 1 av lektionen.

Andra delen av lektionen handlade om att en position i positionssystemet kan bli full och vad det innebär. Vi visade en tom tabell med positionernas namn synliga enligt nedan.

Tusental	Hundratal	Tiotal	Ental	Tiondel	Hundradel	Tusendel

Ett decimaltecken var markerat i tabellen mellan entalen och tiondelarna.

Läraren skrev in en ”1” i entalspositionen och frågade hur många ”ettor” man behövde lägga till för att entalspositionen ska blir full. Detta hade eleverna ingen svårighet med. Samma resonemang fördes sedan med tiotalen, dvs. vi frågade hur många tiotal behövdes för att tiotalsplatsen skulle blir full.

Sedan utökade vi resonemanget till tiondelar. Detta var svårare och några elever adderade 0,1 + 0, 1 + ...+ 0,1 tills de fyllde positionen och kom då på att det är ju samma sak som att multiplicera med 10.

Eleverna fick sedan en parövning med 3 tiondelar som utgångspunkt. De skulle då själva placera 3 tiondelar i tabellen och sedan addera 3 tiondelar tio gånger.

Vi varierade talen under lektionen, men räkneoperationen addition hölls konstant.

Under lektionens tredje del använde vi samma tabell som visades på tavlan. Vi ville nu att eleverna skulle urskilja ett mönster som blir tydligt när man följer en siffra, t.ex. 3 ental och upptäcker vad som händer med siffran 3 när vi multiplicerar den med 10. Sedan multiplicerade vi siffran med 100, 1000 osv. Vi ville synliggöra hur värdet på siffran 3 förändras. Talet 3 hölls konstant men faktorn vi multiplicerade med varierade. Eleverna fick sedan parvis – två och två – i en likadan tom tabell skriva in talet 32 och sedan flytta tiotalet till hundratalspositionen och entalet till tiotalspositionen dvs. förskjuta talet 32 åt vänster i tabellen. Medan de gjorde denna övning skulle de skriva vid sidan om tabellen vilken räkneoperation som utfördes. Efter att de hade förskjutit talet åt vänster i tabellen gjorde de samma sak men med en förskjutning åt höger. Vi ville försöka synliggöra multiplikation och division med 10, 100 och 1000 och trodde att eleverna skulle ha möjlighet att reflektera över att siffrornas värde ändras när man förskjuter dem i decimalsystemet.

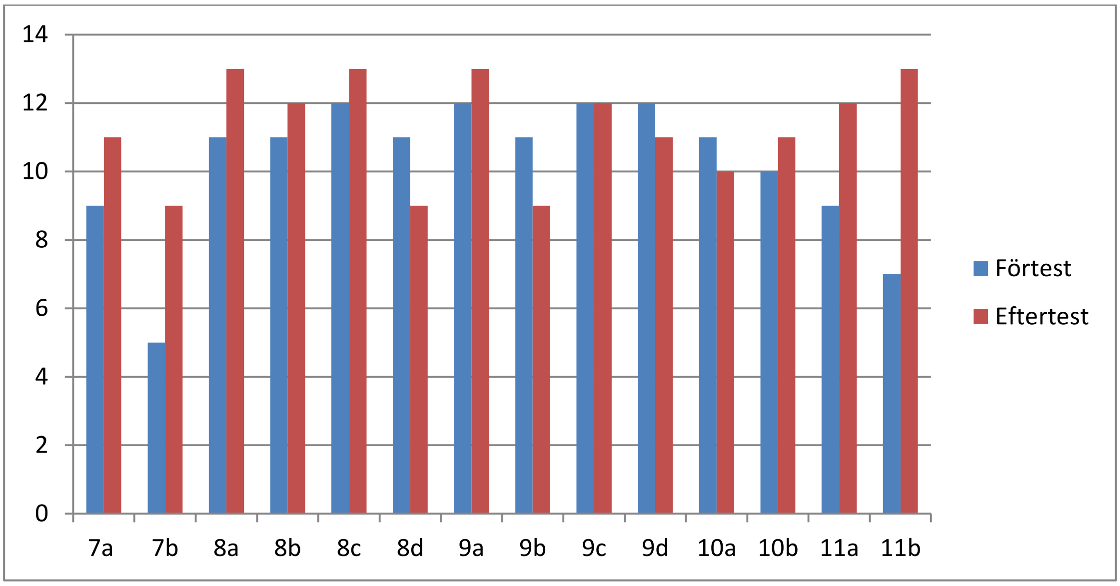
Vi varierade multiplikation och division, men använde samma tal, dvs. 32.

Sammanfattningen av övningen handlade om att konstatera att när vi fyller på uppåt i tabellen, så handlar det om en multiplikation med 10 i varje steg och när vi fyller på nedåt i tabellen, så handlar det om en division med 10 i varje steg.

Analys av eftertest, genomförande av Lektion 1 samt ändringar inför Lektion 2

Eftertestet visade inga större förändringar i jämförelse med förtestet (se Diagram 1).

Diagram 1: Grupp 1(första cykeln) Totalt resultat fråga för fråga



Den lodräta axeln visar totalt antal rätt, den vågräta axeln beskriver vilken fråga det gäller. (Vi tog inte med resultatet på hela testet eftersom vi inte fokuserade på frågorna 1-6 i lektionen. I de andra två cyklerna redovisas resultat från hela testet).

Vi konstaterade att vi inte hade lyckats förändra deras uppfattningar om varken vårt direkta eller indirekta lärandeobjekt. De elever som kunde multiplicera och dividera med 10, 100 och 1000 innan lektionen, kunde det även efter lektionen. På någon uppgift uppvisade eleverna till och med sämre resultat. Uppgift 9b (0,48/100) gav sämre resultat efter lektionen – detta ledde till att vi bad några utvalda elever att resonera individuellt kring just den uppgiften. I dessa intervjuer framkom att de genom att resonera och kontrollera sina resultat visst kunde utföra denna beräkning. En elev uttryckte detta som att ”det är för många steg att hålla i huvudet bara men jag vet hur jag ska tänka”.

Att resultatet blir sämre hos någon elev kan bero på att eleven innan lektionen kände till en metod vid beräkningar och att lektionen sedan kan ha rört till det för eleven och gjort vederbörande osäker.

Vi tror att vi fokuserade på fel aspekt i förhållande till det som vi ville att de ska få möjlighet att lära sig.

Vårt antagande – att ”en position kan bli full” är en kritisk aspekt för att kunna förstå och utföra multiplikation med 10, 100 eller 1000 – var förmodligen felaktigt. Detta moment i lektionen kan ha gjort att vissa elever urskilde något annat och det blev för många kritiska aspekter att hålla reda på för eleverna.

Tabellerna som vi använde som hjälpmedel i lektionen gjorde inte att eleverna fick syn på räkneoperationerna och inte heller på siffrornas värdeförändring. Detta kunde vi konstatera, eftersom resultaten på eftertestet inte blev bättre och vi såg att eleverna i klassrummet utförde övningarna i tabellerna utifrån ett diagonalt mönster, dvs. inte utifrån förståelsen om att siffran har fått ett nytt värde som är 10 gånger större.

Utifrån ett variationsteoretiskt perspektiv måste eleverna få möjlighet att urskilja de kritiska aspekterna genom att få möjlighet att erfara dessa aspekter som en *dimension av variation* (Olteanu, 2013). Detta gav vi inte eleverna möjligheten till när vi använde tabellerna som hjälpmedel. Eleverna såg ett mönster, men mönstret ledde inte till att de kunde urskilja den fjärde kritiska aspekten:

- Förståelse för hur värdet av ett tal förändras vid multiplikation eller division med 10, 100 osv. – att se mönstret vid dessa multiplikationer och divisioner

Vi insåg att eleverna borde få möjlighet att urskilja detta under Lektion 2 – för att uppnå vårt syfte, kom vi fram till att vi måste på ett systematiskt sätt visa eleverna variation och separation av varje kritisk aspekt (Olteanu, 2013).

Inför Lektion 2 har vi reflekterat över Marton och Booths (2000) observationer att den lärande måste få en skymt av det gestaltade lärandeobjektet och koppla ihop detta med helheten av det som skall läras. I undervisningen måste vi som lärare skapa en variation och tillämpa det på någonting som annars är fast och självklart för eleven.

Vi lyckades med att urskilja den kritiska aspekten:

- Vad decimaltecknet står för, förståelse för heltal och decimaltal

Det var viktigt att eleverna kände till detta för att kunna diskutera positionernas betydelse och siffrornas värde när ett tal multipliceras eller divideras med 10, 100 och 1000.

Lektion 2 samt variationsmönster som användes i Lektion 2

Utifrån analysen av resultaten och undervisningen (se ovan) ändrade vi de kritiska aspekterna till följande;

- Förståelse för positionssystemet, decimaltecknets betydelse
- Förstå att siffrans värde i ett tal är beroende av dess position
- Förståelse för hur varje siffras värde förändras vid en multiplikation eller division med 10, 100, 1000

Vi valde att ha samma inledning som vid Lektion 1 där vi visade skillnaden mellan heltal och decimaltal. Läraren betonade siffrornas värde och talets värde samt ställde frågor som t.ex. ”Hur kan man veta att 321 är samma tal som 321,0?” eftersom detta blev inte tillräckligt tydligt i Lektion 1.

För att urskilja den kritiska aspekten ”Förstå att siffrans värde i ett tal är beroende av dess position”, valde vi att hålla siffrorna konstanta och variera decimaltecknets placering.

Detta kan illustreras med följande exempel:

453,265

4,53265

45326,5

Under genomgången ställdes frågan om hur siffran 3:s värde hade förändrats beroende på var i talet decimaltecknet placerades. Eleverna följde med bra i denna övning, men flyttade vi decimaltecknet fyra steg, så blev det lite mer osäkra svar troligtvis berodde detta på att det blev för många steg att hålla i huvudet. Nästa övning gick ut på att generalisera det som eleverna just hade erfarit. Läraren skrev nu ett annat tal på tavlan, t.ex. 3,02 bredvid 302. Frågan till eleverna var nu:

- ”Vad händer med talets värde?”
- ”Hur kan man genom beräkning komma från 3,02 till 302?”

Eleverna fick sitta och diskutera likande övningar. Först skulle de observera talet och varje siffras värdeförändring – sedan skulle de skriva bredvid talet vilken beräkning som ledde till respektive värdeförändring.

Sammanfattningsvis betonade läraren att ”värdet på talet har nu blivit 100 gånger större, dvs. varje siffras värde i talet har blivit 100 gånger större”.

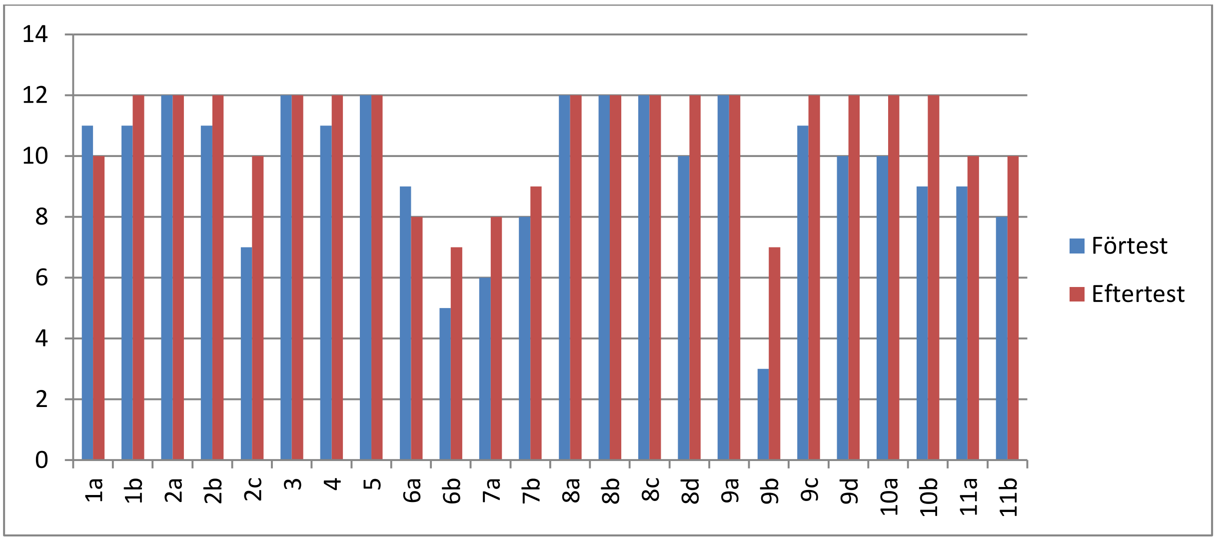
Eftersom det med ett variationsteoretiskt perspektiv är nödvändigt att urskilja alla de, för förståelsen, kritiska aspekter på samma gång – för att kunna förstå något på ett visst sätt (Holmqvist, 2006) – en s.k. fusion (Olteanu, 2013) valde vi att ge eleverna följande utmaning. Den gick ut på att eleverna fick hitta sambandet mellan två tal t.ex. ”32 ... = 3,2”. De skulle sedan välja mellan multiplikation och division skrivet som symboler och talen 10, 100 och 1000 för att få likheten att stämma. Vi varierade både tal och räknesätt.

Eleverna diskuterade med varandra hur de tänkte. Vi ville att de även skulle vara helt säkra på sin sak genom att finna ett sätt att kontrollera sina beräkningar, dvs. vi ville att de skulle diskutera och reflektera över hur varje siffras värde hade förändrats med hjälp av det använda räknesättet.

Analys av eftertest efter genomförandet av Lektion 2 samt ändringar inför Lektion 3

Resultaten av eftertestet visade dels att 10 elever hade förbättrat eller hade samma resultat som innan lektionen, dels att 2 elever hade försämrat sina resultat. Uppgift 9b, dvs. 0,48/100, var den uppgift som flest elever gjorde fel på – tittar man på uppgiften enskilt, så klarade 3 elever av 12 uppgiften i förtestet och 7 av 12 i eftertestet (Diagram 2).

Diagram 2: Grupp 2 (andra cykeln) Totalt resultat fråga för fråga



Den lodräta axeln visar totalt antal rätt, den vågräta axeln beskriver vilken fråga det gäller.

Beslutet att ändra större delen av Lektion 2 visade sig vara bra. Att föra in övningar där det blev tydligare kontraster och separationer mellan exemplen för att visa en siffras värdeförändring som följd av multiplikation eller division med 10, 100 och 1000 visade sig ge positivt resultat. Men resultatet var inte tillräckligt tillfredsställande, eftersom det fortfarande var 5 av 12 som inte klarade uppgift 9b. Resultaten vid uppgift 6 och 7 gav inga större förändringar vilket kan bero på att vi inte fokuserade på den typen av uppgifter under lektionen. Samtidigt hade vi en förhoppning om att Lektion 2 skulle kunna ge eleverna kunskap så att det skulle kunna klara fler uppgifter av den typen.

Troligtvis döljer sig fler kritiska aspekter som man måste undervisa om vid lösning av uppgift 6 och 7. Men om vi skulle lyfta in dessa i lektionen, så kan det medföra för många kritiska aspekter att ta hänsyn till på en och samma gång för eleverna. Enligt de teoretiska ramarna för Learning study, bör man hålla sig till två eller maximalt tre kritiska aspekter per lektion för att det inte ska kunna bli tydligt för eleverna vad de ska urskilja (Olteanu, 2013). Uppgift 9b (0,48/100) och 9d (40,8/10) innehåller division av ett tal som innehåller en nolla och ett decimaltecken. Det kan också vara så att siffran 0 är en kritisk aspekt vid division med 10, 100 och 1000. Vad nollan har för betydelse ska vi ta med vid planeringen av Lektion 3.

Lektion 3 samt variationsmönster som användes i Lektion 3

I Lektion 3 hade vi kvar samma kritiska aspekter;

- Förståelse för positionssystemet, decimaltecknets betydelse
- Förstå att siffrans värde i ett tal är beroende av dess position
- Förståelse för hur varje siffras värde förändras vid en multiplikation eller division med 10, 100, 1000

Vi ändrade några övningar och ställde frågor som ledde till att eleverna var tvungna att uttrycka vad nollan har för värde – och vad den spelar för roll – beroende på var i talet nollan befinner sig.

Vi gjorde om vår lektionsinledning där vi kontrasterar heltal mot decimaltal och betonade varje siffras värde i talet utifrån dess position. Till exempel uttalades talet 321 noggrant som 3 hundratal, 2 tiotal och 1 ental. Efter detta lade läraren till en nolla på slutet av talet, dvs. skrev 3210. Vi höll siffrorna konstanta men varierade talens värde genom att göra dem 10 gånger större. Vi frågade eleverna vad som "hände" med talet och resonerade kring siffrornas ”nya” värden samt påpekade att talet nu hade blivit 10 gånger större. Exempel på frågor som vi ställde var:

- Vad är det för räkneoperation som ligger bakom värdeförändringen?
- Vad har nollan för betydelse i detta tal?
- Varför behövs den?

Vi placerade sedan ett decimaltecken efter talet 3210, dvs. skrev ”3210,” och frågade:

- Vad har vi nu gjort med talet?

I samband med detta förde vi ett resonemang om decimaltecknets betydelse.

I nästa exempel hölls siffrorna konstant och vi varierade placeringen av decimaltecknet. Talet 32,10 skrevs på tavlan. Vi ställde samma frågor som i början av lektionen om värdeförändringen och vad som har hänt med talet. Vi poängterade att talet har blivit 100 gånger mindre och att varje siffras värde har blivit 100 gånger mindre. Frågorna som följde var:

- Vad innebär det egentligen?
- Vilken räkneoperation ligger bakom i detta fall?

Den efterföljande diskussionen i klassrummet handlade om nollans nya värde, dess funktion och om nollan överhuvudtaget behövs i detta fall.

Vi genomförde detta eftersom studier (McIntosh, 2009) visar att det är viktigt att eleverna förstår vad varje siffra står för att sedan kunna utföra effektiva beräkningar.

För att eleverna bättre ska kunna förstå siffran nolls betydelse i positionssystemet och utnyttja positionssystemets uppbyggnad när de utför en multiplikation eller en division med 10, 100 och 1000, gav vi dem nu en annan övning. I den övningen höll vi talet 3,2 och faktorn 1000 konstant, men eleverna fick tre olika svarsalternativ.

Frågan till eleverna blev: ”Om talet 3,2 ska bli 1000 gånger större, dvs. multipliceras med 1000, vilket svar anser du då är det rätta och varför?”

1. 3000,2 2. 3,2000 3. 3200

Eleverna fick se alternativen skrivna på tavlan och sedan blunda och räcka upp 1, 2 eller 3 fingrar i luften beroende på vilket svarsalternativ de valde. Alla valde rätt alternativ och kunde även resonera om varför just det alternativet var rätt.

En följdfråga ställdes nu till gruppen: ”Om 3,2 ska bli 999 gånger större, dvs. multipliceras med 999, kan vi direkt säga vad resultatet blir?”

Här försökte vi skapa variation med hjälp av att ha talet 3,2 konstant, men variera faktorn som talet ska multipliceras med.

Resonemangen övergick till liknande genomgång som vid Lektion 2, t.ex. ”Hur kan du komma från 5,04 till 504?” och ”Vilken räkneoperation måste utföras och hur förändrar det talets värde och varje siffras värde?”

Exempel på uppgifter till eleverna

50,4 ... 5,04

504 ... 0,504

0,504 ... 0,00504

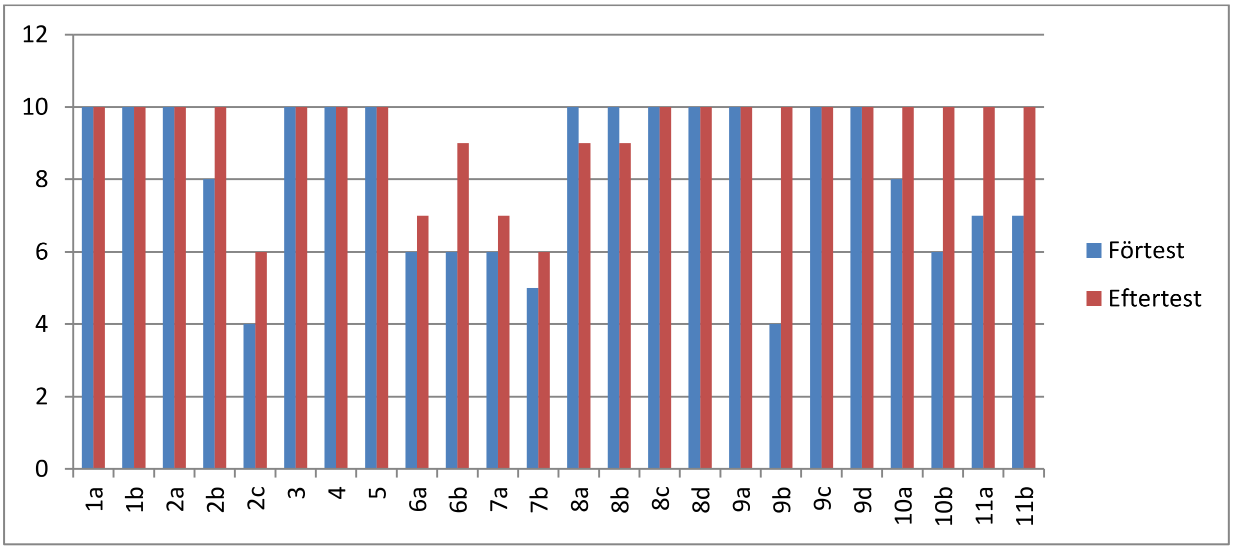
Resonemanget fördes nu om hur 5:ans värde ändrades i de olika exemplen. Siffran 5 hölls konstant, men dess position och därmed värde varierades.

Eleverna fick sedan exakt samma övningar att utföra som vid Lektion 2.

Analys av eftertest efter genomförandet av Lektion 3

De totala resultaten från för- och eftertest blev bättre eller lika bra som innan. (se Diagram 3)

Diagram 3: Grupp 3 (tredje cykeln) Totalt resultat fråga för fråga



Den lodräta axeln visar totalt antal rätt, den vågräta axeln beskriver vilken fråga det gäller.

Uppgift 9b (0,48/100), som vi tror innehöll en kritisk aspekt – dvs. att talet som skulle divideras med 10 eller 100 hade en nolla innan decimaltecknet – löstes av alla elever i eftertestet (10 elever av 10 jämfört med 4 av 10 i förtestet). Detta visar att vi troligtvis lyckats urskilja något nytt, när det gäller nollans betydelse. Vi tror att detta berodde på att vi gjorde bättre separationer av talen under lektionen. Den sista elevövningen, där vi varierade tal och räknesätt, är en fusion vilket gör att eleverna var tvungna att ta hänsyn till alla kritiska aspekter samtidigt. Enligt variationsteorin är det då lärande uppstår (Olteanu, 2013).

DISKUSSION

Elever kan ha svårt att förstå att positionernas värde ökar tiofalt åt vänster och minskar tiofalt åt höger (McIntosh, 2009). Vår inledning vid respektive lektion gav eleverna möjlighet att urskilja decimaltecknets betydelse, men vi borde ha kontrasterat och varit tydligare kring talets värde och visat hur värdet på en siffra i ett tal blir 10 gånger större i varje steg när man förflyttar sig till vänster och10 gånger mindre när man förflyttar sig till höger. Detta är viktigt att förstå för att senare kunna koppla ihop detta med tiopotenser och även för att kunna utföra beräkningar med tal som har andra baser än 10. Vidare ser vi att elevernas resultat förbättrades för varje lektion (se Diagram 1-3) i och med att vi har blivit tydligare i hur vi uttryckte oss samt gjorde tydligare urskiljningar under respektive lektioner. Det sistnämnda uppnådde vi dels med hjälp av tydliga kontraster i exemplen vid genomgången och dels genom att göra generaliseringar i exemplen som eleverna sedan själva fick pröva på.

Som lärare ska man försöka iscensätta situationer för lärande där eleverna möter nya principer och förklaringar på ett sätt som skapar spänning. Vi behöver öppna för utmaningar där elevernas förståelse inte är fullständig, för att nyfikenheten ska driva eleverna till att förstå fenomenet fullt ut (Marton & Booth, 2000). Detta gjorde vi när vi i Lektion 2 och Lektion 3 valde nya utmaningar för eleverna och medvetet ställde frågor som kräver att eleverna tar ett eget kliv i förståelsen för att på så sätt trigga dem att lösa uppgifterna. Vår första lektion var inte tillräckligt utmanade eftersom eleverna blev lite passiva och bara löste uppgifterna slentrianmässigt utan att aktiviteterna ledde till lärande. Eleverna går inte från en uppfattning till en annan i Lektion 1 vilket lärande handlar om (Olteanu, 2013).

I en Learning study är det viktigt att skapa ett förtest som får eleverna att visa förståelse för de troliga kritiska aspekterna.

Genom att ta reda på elevers förkunskaper om lärandeobjektet, dvs. det som ska göras möjligt att lära, kan man avgränsa olika aspekter som är viktiga för att lära sig. Dessa aspekter måste sedan synliggöras genom variation när man lägger upp undervisningen i klassrummet.

Förtestet var identiskt med eftertestet. Om vi hade fått göra om denna studie, så hade vi både lagt ner mer tid på samt reflekterat djupare kring förtestets utformning. Vi ville förbättra elevernas kunskaper om multiplikation och division med 10, 100 och 1000 men också få dem att förstå innebörden av dessa beräkningar. Våra frågor var inte heltäckande i detta syfte men vi kan konstatera att vi har fått eleverna att ändra uppfattning och därmed få ökad förståelse för bl.a. siffran 0:s betydelse.

Vårt *intentionella* lärandeobjekt var multiplikation och division med 10, 100 och 1000 och vi anser att vi kanske inte kommit hela vägen fram till att alla elever i vår studie kan multiplicera och dividera med 10, 100 och 1000. Därför skulle vi gärna vilja fortsätta att utveckla undervisningen med hjälp av *variationsteorin* i ytterligare en lektion.

De *intentionella* och de *iscensatta* lärandeobjekten kan vara något lättare att styra över och vi upplever det som att vi har haft kontroll på dessa lärandeobjekt. När det gäller det *erfarna lärandeobjektet,* så tror vi att eleverna har fått nya förklaringar och därmed ett lärande har ägt rum. Det verkar vara godtyckligt vad eleverna erfar i samband med ett *iscensatt* lärandeobjekt – för att gå på djupet med detta, bör vi fortsätta att utveckla vår undervisning genom ett variationsteoretiskt perspektiv. I ett fortsatt utvecklingsarbete bör vi ställa oss frågor som ”Vad måste eleverna få syn på?” och ”Hur varierar vi exemplen så att eleverna får syn på det som skall läras” (Olteanu, 2013). På det sättet bör vi kunna utveckla undervisningen och sätta fokus på det som är kritiskt för lärandet inom ett visst matematiskt område.

REFERENSLISTA

Holmqvist, M. (2006). *Lärande i skolan. Learning study som skolutvecklingsmodell.* Lund: Studentlitteratur.

Maunula, T., Magnusson, J. & Echevarría, C. (2011). *Learning study - undervisning gör skillnad*. Lund: Studentlitteratur.

Marton, F. & Booth, S. (2000). *Om lärande*. Lund: Studentlitteratur

Marton, F., & Tsui, A. B. M. (Eds.). (2004). Classroom discourse and the space of learning. Mahwah: N.J.: Lawrence Erlbaum.

McIntosh, A. (2009). *Förstå och använda tal – en handbok*. Nationellt Centrum för Matematikutbildning, NCM, Göteborgs universitet.

Olteanu, C. (2013, september). *Att analysera lärande i matematik i klassrummet*. Seminarium vid Linnéuniversitetet i Kalmar.

Wernberg, A. (2009). *Lärandets objekt – Vad elever förväntas lära sig, vad görs möjligt för dem att lära och vad de faktiskt lär sig under lektionerna*. Umeå Universitet: Print & Media