

---

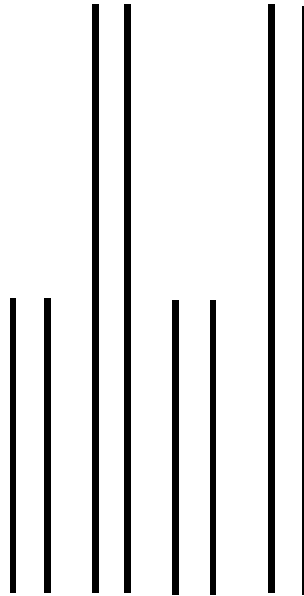
# Elever med särskilda förmågor och fallenhet i matematik

Linda Mattsson, doktorand i matematik med inriktning mot ämnesdidaktik vid Göteborgs Universitet

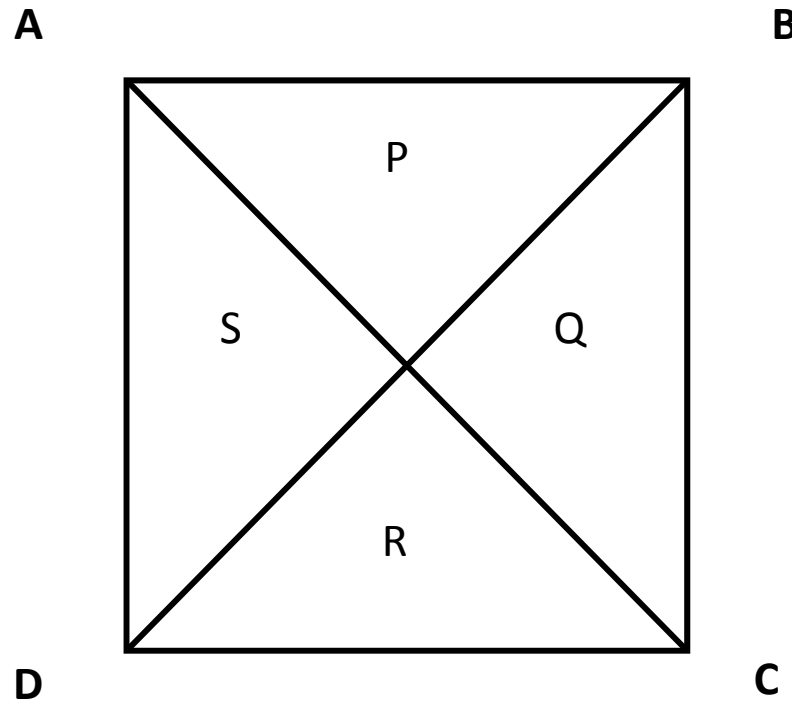
Eva Pettersson, universitetsadjunkt i matematik vid Blekinge Tekniska Högskola och forskarstuderande i matematik med didaktisk inriktning vid Växjö Universitet

---

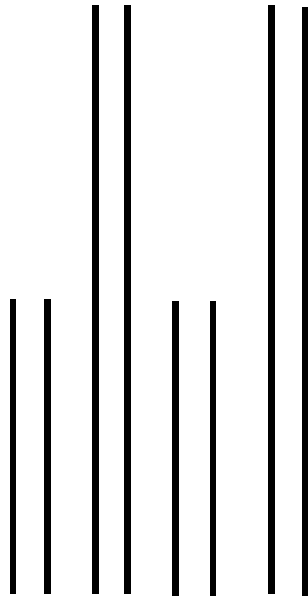
# Hur fortsätter mönstret?



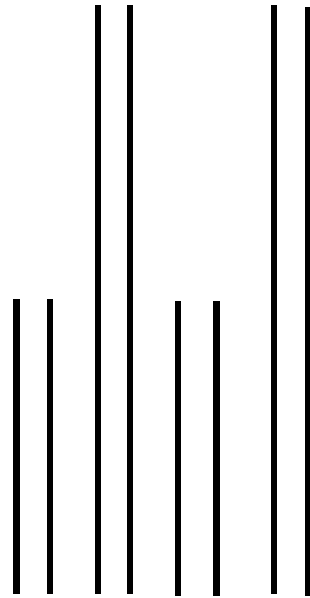
ABCD är en kvadrat. Beräkna  
förhållandena mellan areorna P, Q, R  
och S.



Skapa tre, och endast tre, identiska (alt.  
kongruenta) kvadrater med hjälp av  
alla stickor

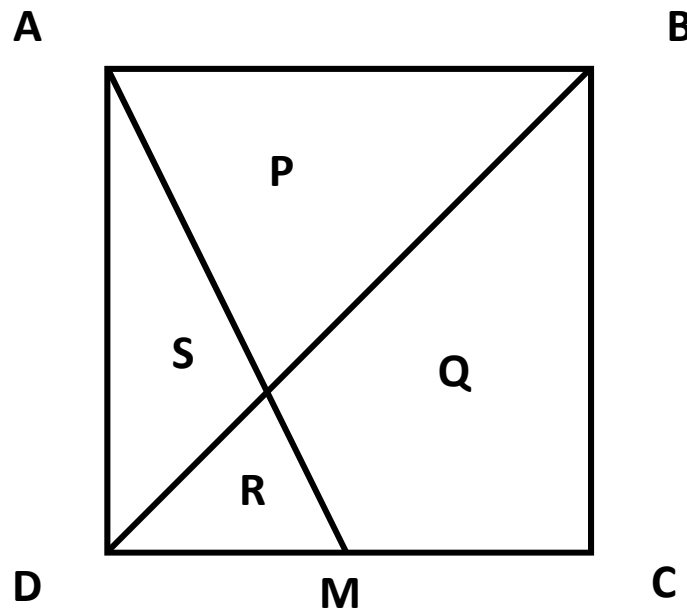


Skapa tre och endast tre identiska (alt.  
kongruenta) kvadrater med hjälp av  
alla stickor



Är det den enda lösningen? Hur vet du det?

ABCD är en kvadrat. Beräkna förhållandena mellan areorna P, Q, R och S, om M är mittpunkten på sträckan CD.



---

# Varför undervisningsfokus på elever med särskilda förmågor och fallenhet i matematik?

- Ett "matematiserat" samhälle är beroende av dessa individers kompetens
  - Rättighet till utbildning enligt läroplanen
  - Behöver, precis som andra elever, stöd i sin matematiska utveckling
  - Höjda förväntningar på alla elever
-

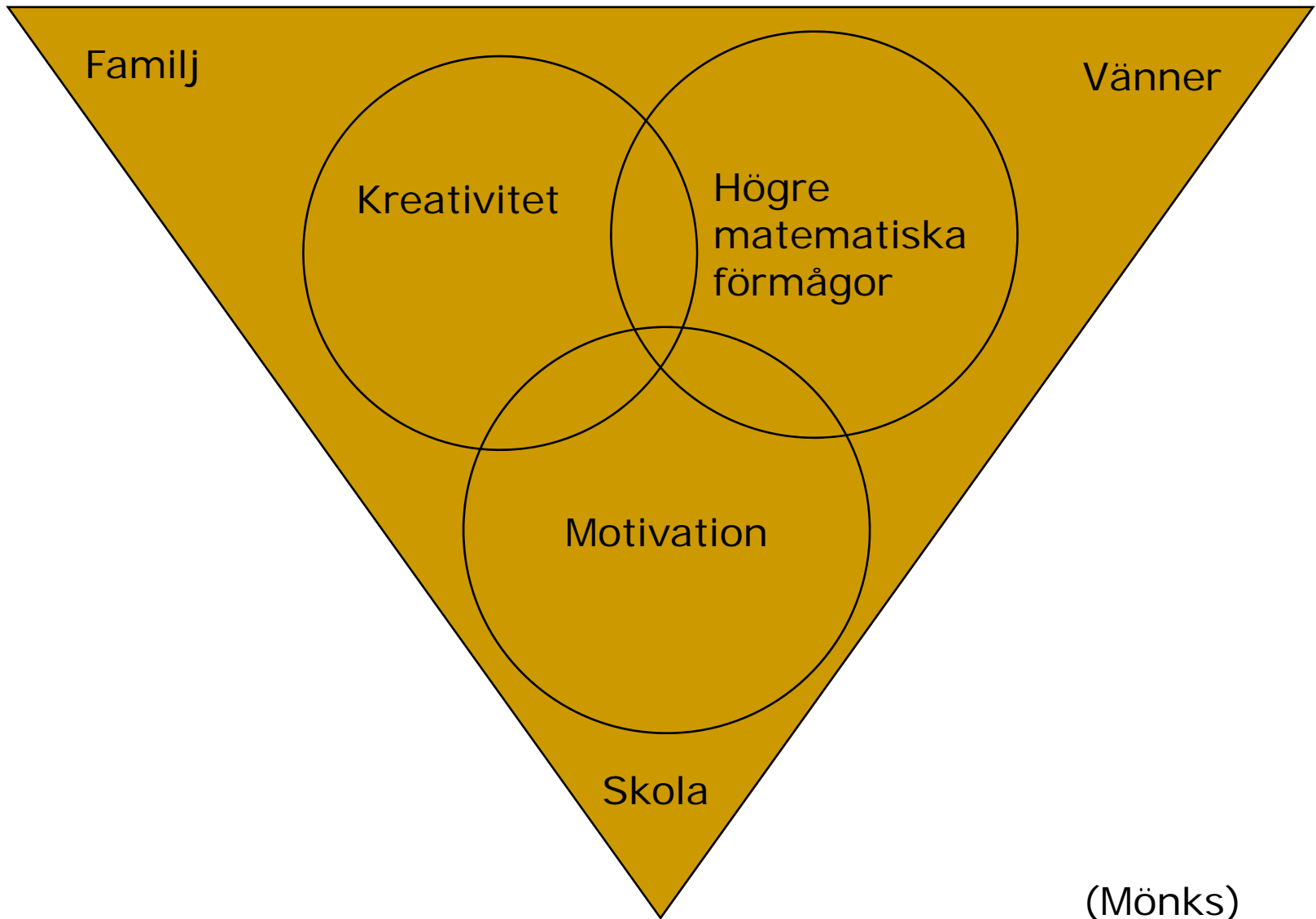
- 
- "Gifted children should be able to benefit from appropriate educational conditions that would allow them to develop fully their abilities, for their own benefit and for the benefit of society as a whole." (Europarådets rekommendation 1248, 1994)
-



---

# Allmänt om elever med särskilda förmågor och fallenhet i matematik

- Kan vara generellt "begåvade", men det är vanligare att eleven har särskilda förmågor och fallenhet i ett ämne
  - Kan vara högpresterande, men kan även vara lågpresterande (underpresterande) i skolan
  - Att en elev är högpresterande i skolan innebär inte tvunget att eleven uppvisar de förmågor som Krutetskii lyfter fram
-



(Mönks)

---

# Matematisk förmåga enligt Krutetskii

- Många olika förmågor bildar gemensamt den matematiska förmågan
  - Svaghet i vissa förmågor kan kompenseras av styrkor i andra
  - Ser inte förmågorna i sig som medfödda
  - Förmågorna utvecklas genom övning, aktivitet och erfarenhet
  - Vad som ärvt är snarare en benägenhet att utveckla förmågorna
-

# Krutetskiis beskrivning av den matematiska förmågans struktur

## De aspekter han pekar ut är:

- förmågan att *insamla matematisk information*, t.ex. förmåga att se den formella strukturen i ett matematiskt material, förmåga att göra både analys och syntes samtidigt av ett matematiskt material och på så sätt fånga helheten utan att tappa delarna.
- förmågan att *bearbeta matematisk information*, t.ex. förmåga till logiskt tänkande, systematiskt och sekventiellt tänkande, flexibilitet i tänkandet samt en strävan efter att förenkla och förkorta resonemanget i en problemlösning. Förmåga att ifrån ett eller flera specialfall kunna se allmängiltiga samband eller relationer.
- förmågan att *bevara matematisk information*, t.ex. förmåga att minnas matematiska relationer, problemtyper och huvudsakliga argument i bevis.
- Till dessa kommer en mer generell förmåga som kan beskrivas som matematiskt sinnelag

(Krutetskii, s. 350-351)

## Exempel 1: (*problem 10 vid Kängurutävlingen*)

- Av 2006 skolbarn i Malmö hade 1500 varit med i Kängurutävlingen och 1200 i Vargungetävlingen. Hur många av barnen hade deltagit i båda tävlingarna om det var 6 barn som inte varit med i någon av tävlingarna?
- *Johan: Det ser man ju direkt.*
- *Eva: Försök ändå förklara för mig.*
- *Johan: De var 2006 barn men 6 hade inte varit med alltså 2000. Det hade gjorts 2700 prov, då måste 700 ha gjort båda proven.*

## Exempel 2: (problem 12 vid kängurutävlingen)

- Mormor sa till barnbarnen: "om jag bakar 2 pajer till er var, så får jag deg över som räcker till ytterligare 3 pajer. Men jag kan inte baka 3 pajer till er var, för då räcker inte degen till de 2 sista pajerna." Hur många barnbarn hade mormor?
- *Johan: Ja, det blir ju 5.*
- *Eva: Kan du förklara.*
- *Johan: Nej, det vet jag inte. Man ser ju att skillnaden är 1 paj och så är den andra skillnaden 5 pajer. Då måste det ju vara 5 barn.*

# Som en likning?

Likning:

$x$  = antal barnbarn

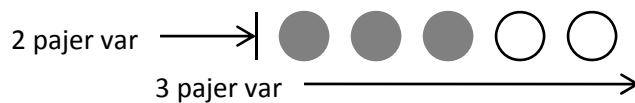
$$2x + 3 = 3x - 2$$

$$3 + 2 = 3x - 2x$$

$$5 = x$$

# Hur tänker Johan?

- En möjlig tolkning av Johans resonemang är att han utgår ifrån en degklump, där det i ena fallet (2 pajer) blir deg över till 3 pajer och i det andra fallet (3 pajer) saknas deg till 2 pajer.

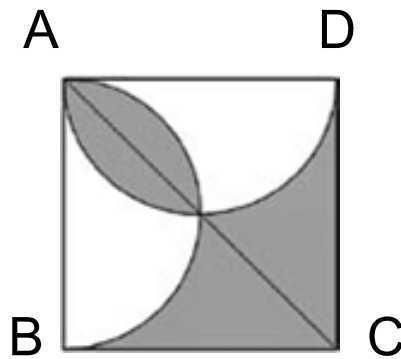


- Hans uttryck "*Man ser ju att skillnaden är en paj*" gestaltas då av de två möjliga fallen, 2 respektive 3 pajer var, och uttrycket "*så är den andra skillnaden fem pajer*" blir summan av den deg som är över respektive saknas.



# Utmaning 1

- I figuren har en kvadrat ABCD och två halvcirklar med diametern AB och AD ritats upp. Om längden av AB är 2 cm, hur stor är den skuggade arean?



---

# Lösning 1

- Genom att rent geometriskt visa att de två små skuggade områdena längst upp till vänster i figuren kan fällas ner och fylla ut tomrummen i halvcirklarna vilket gör att de skuggade områdena tillsammans bildar halva kvadraten vilken därmed är två kvadratcentimeter. Han berättade att det var så han själv hade löst uppgiften först, genom att helt enkelt se detta i figuren.
-

# Lösning 2

- Först beräknar vi hela kvadratens area som är fyra kvadratcentimeter samt cirkelhalvornas areor som är  $\pi/2$  var. Sedan delar vi in kvadraten i fyra små kvadrater som vardera har arean en kvadratcentimeter och inuti den övre vänstra kvadraten finns en cirkelsektor som har arean  $\pi/4$ . Om vi subtraherar cirkelsektorn från kvadraten få vi det streckade området i figuren nedan. Med hjälp av detta kan vi nu beräkna arean av det lilla skuggade området överst i vänstra kvadraten. Den matematiska uträkningen som Johan visade såg ut på följande sätt:
- Kvadraten:  $2 \cdot 2 = 4 \text{ cm}^2$  Halvcirkel:  $1 \cdot 1 \cdot \pi/2 \text{ cm}^2$
- Liten kvadrat:  $1 \cdot 1 = 1 \text{ cm}^2$
- Cirkelsektor:  $\pi/4 \text{ cm}^2$
- Streckade området:  $(1 - \pi/4) \text{ cm}^2$
- Övre skuggade området:  $1 - 2(1 - \pi/4) = \pi/2 - 1 \text{ cm}^2$
- Samtliga skuggade områden:  $4 - \pi + 2(\pi/2 - 1) = 2 \text{ cm}^2$

---

# Funktioner

---

---

# Funktioner

- Funktionsmaskinen i verkligheten
  - Koordinatsystemet på papper
  - Funktionsmaskiner på papper
  - Koordinatsystemet på golv
  - Funktionsmemory
  - Avslutning med flagghissning
-

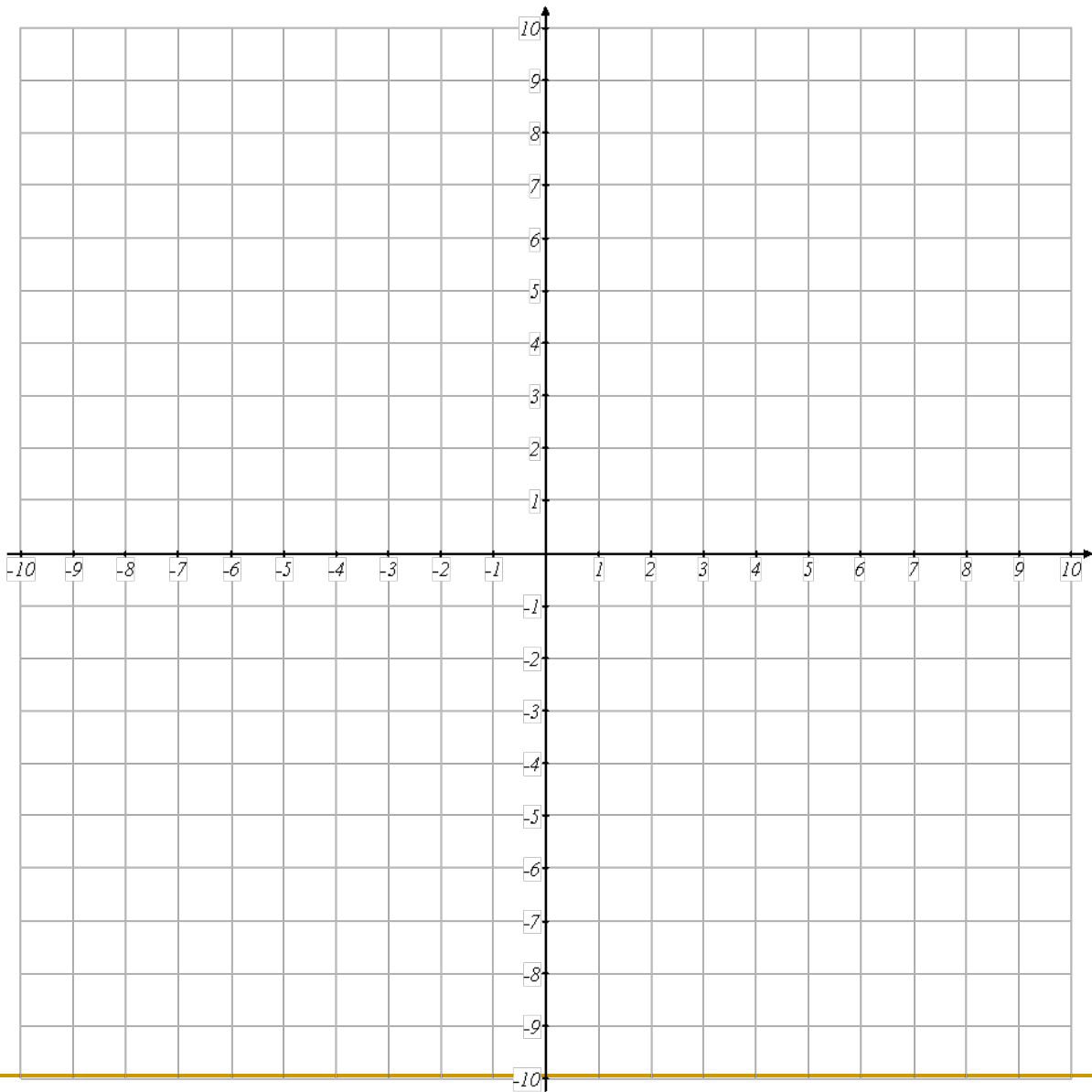
---

# Funktionsmaskinen i verkligheten

- Låt en kartong eller ett tält få utgöra själva maskinen. Där inne finns fröken eller så småningom en elev som utgör maskinisten. Nu får någon elev rulla in bollar eller ett tal, fröken rullar sedan ut ett visst antal bollar/ett annat tal som beskriver funktionssambandet. Elever skall i ord beskriva vad som händer. En del elever kanske även kan teckna funktionen.
-

# Koordinatsystem på papper

- Dela ut papper med koordinatsystem. Använd från början bara de positiva axlarna med bokstäver på den ena axeln och siffror på den andra för att sedan övergå till siffror på båda axlarna. Därefter kan koordinataxlar med både positiva och negativa siffror används. Be eleverna rita en symbol eller trycka en stämpel på koordinatsystemet. Gör sedan en tipspromenad eller läs koordinater högt i klassen. Den som får flest punkter innanför sin symbol eller först får ett visst antal punkter innanför sin symbol vinner.





10

9

8

7

6

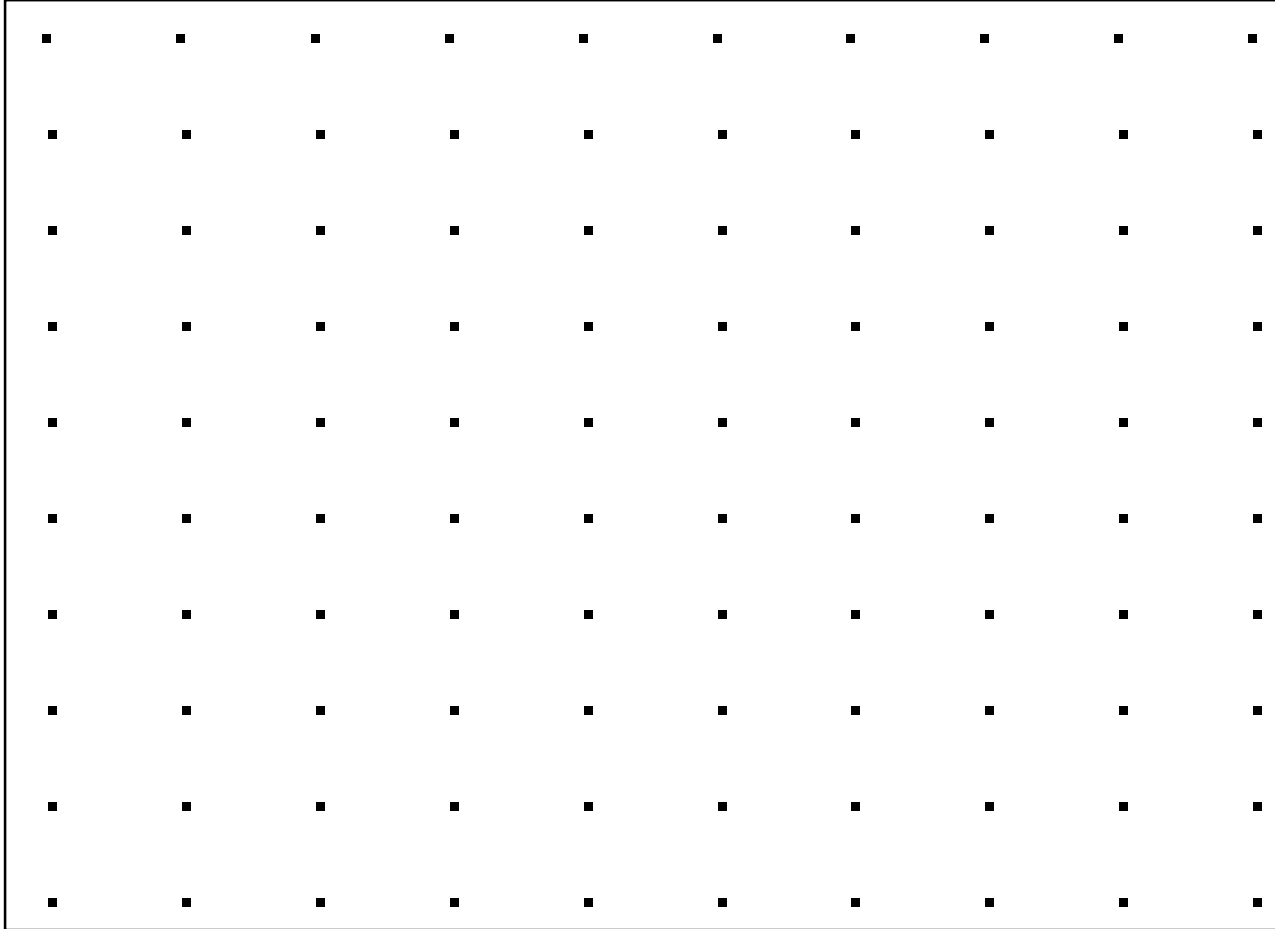
5

4

3

2

1



A

B

C

D

E

F

G

H

I

J

---

# Funktionsmaskiner på papper

- Låt eleverna först göra klart funktionsmaskinerna genom att fylla i de tomma rutorna så att sambandet stämmer med de redan ifyllda talen. Därefter skall de formulera sambandet i ord. Till sist gäller det att kunna teckna en funktion med symboler.
-

---

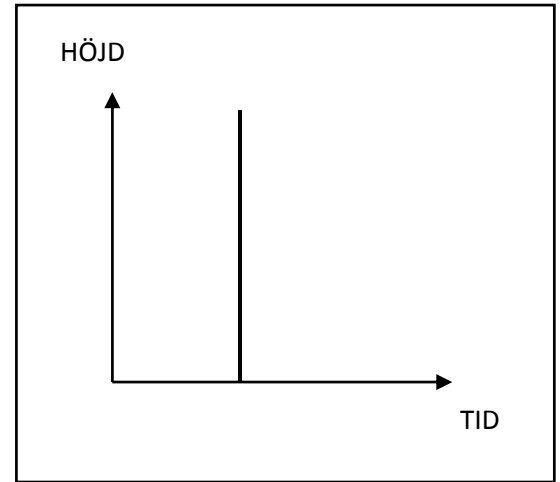
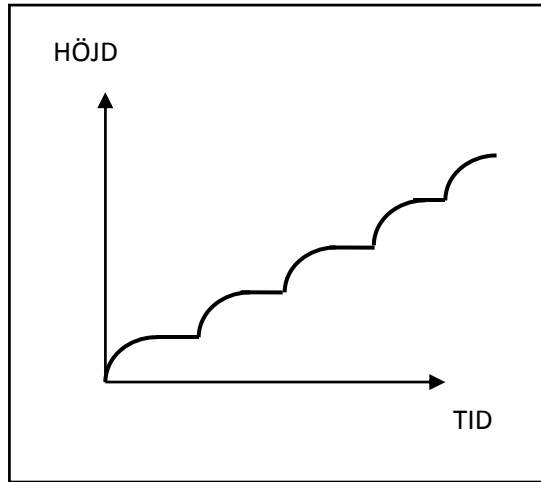
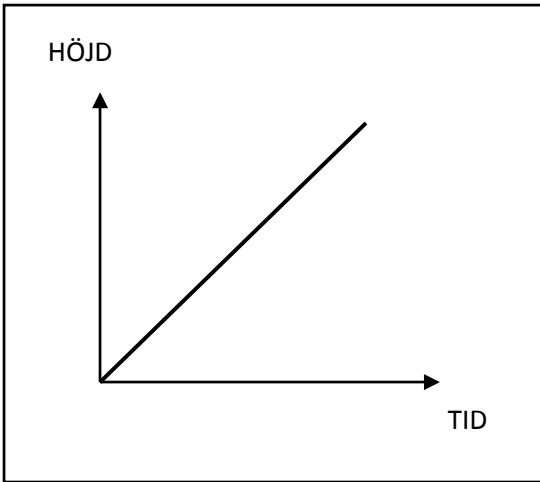
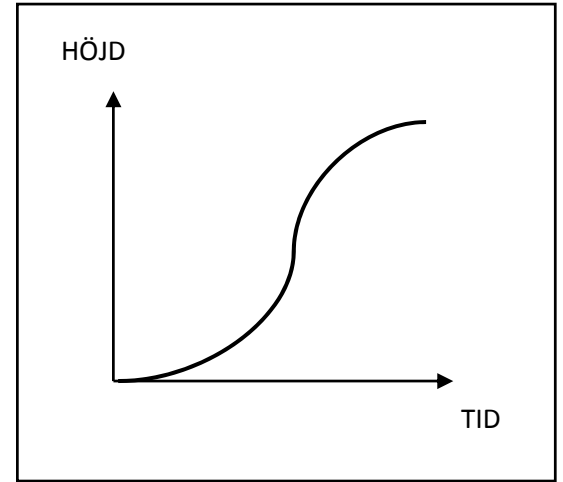
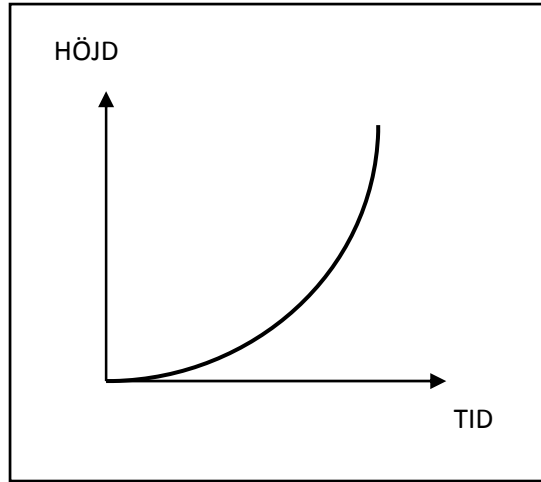
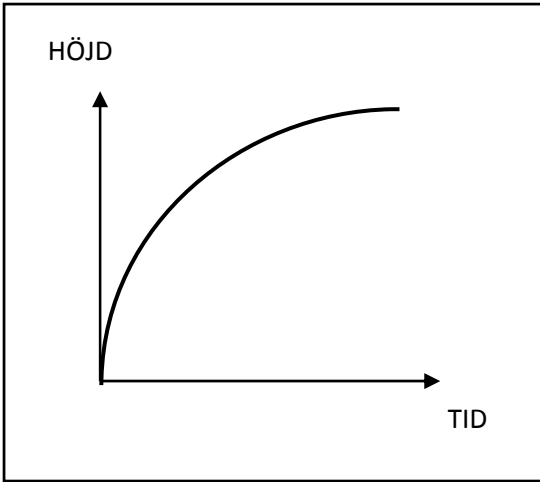
# Funktionsmemory

- Nu har eleverna arbetat med koordinater och grafer och sambandet i en funktion. De vet hur man beskriver en funktion med symboler och vet hur koordinatsystemet är uppbyggt. Då gäller det att träna på vilken funktion som hör ihop med vilken graf. Här finns ett antal memory att välja bland. Från de allra enklaste linjära funktionerna som passerar origo till andragsradsfunktioner. Funktionsmemory kan man göra själv eller köpa in från MatteEva, se adress sista sidan.
-

---

# Funktionsgrafer som beskriver händelseförlopp

- Flaggan i topp för funktioner
-



# Skissa grafer till händelser som beskrivs i ord

- Ju mindre godisbitar vi tar, desto fler kan vi få plats med i godispåsen. (antal bitar/storlek på bitar)
- Tyngdlyftaren höll stängen över huvudet under några sekunder och tappade den sedan med en våldsam krasch. (höjd/tid)
- Efter konserten blev det alldeles tyst. Men så började en person i publiken applådera och gradvis anslöt sig allt fler till applåderna. Snart jublade och applåderade hela publiken.(?/?)

---

# Las Vegas

- **Addition:**
- Tärningsspel för 2 till 6 deltagare. Dela upp er på två lag, ett lag på varje sida om spelplanen. Varje lag skall ha två tärningar samt 10 spelmarker.
- Ni skall nu börja spela. Först skall ni komma överens om vilka tal ni skall satsa på.
- Det är addition och det är summan av de två tärningarnas prickar som gäller. Ni får satsa hur många marker ni vill på varje ruta/tal.
- Ni slår tärningarna och beräknar summan. Om ni satsat på detta tal får ni ta bort en av de marker ni satsat. Sedan går turen över till andra laget.
- Den som först har samlat tillbaka sina marker har vunnit. Sedan är det bara att börja om från början igen och fundera på om ni vill satsa på samma sätt.
- **Lycka Till!**

---

# Las Vegas

- **Subtraktion:**
- Ni slår tärningarna och beräknar differensen mellan den tärning som visar det högsta talet och den som visar det lägsta. Om ni satsat på detta tal får ni ta bort en av de marker ni satsat. Sedan går turen över till andra
- Den som först har samlat tillbaka sina marker har vunnit. Sedan är det bara att börja om från början igen och fundera på om ni vill satsa på samma sätt.
- **Lycka Till!**

.

---



---

# Las Vegas

- **Multiplikation:**
  - Ni slår tärningarna och beräknar produkten. Om ni satsat på detta tal får ni ta bort en av de marker ni satsat. Sedan går turen över till andra laget.
  - Den som först har samlat tillbaka sina marker har vunnit. Sedan är det bara att börja om från början igen och fundera på om ni vill satsa på samma sätt.
  - **Lycka Till!**
-

---

# Las Vegas

- Efter varje spel är det viktigt att gå igenom resultatet. Vilket tal var sannolikt bäst att satsa på och varför. Hur många kombinationer finns det och hur många av dessa har den som har flest.

# Addition

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

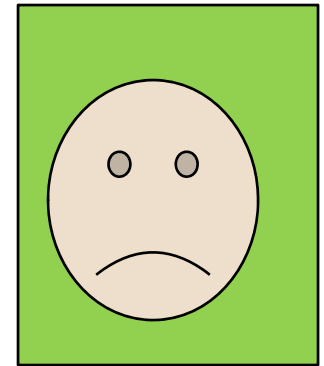
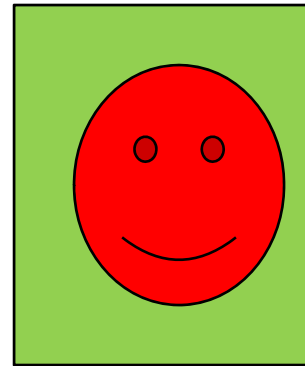
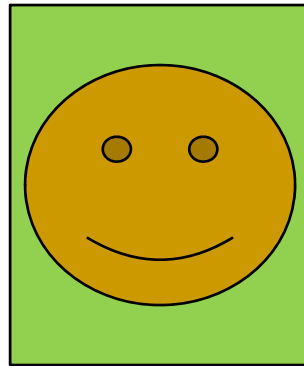
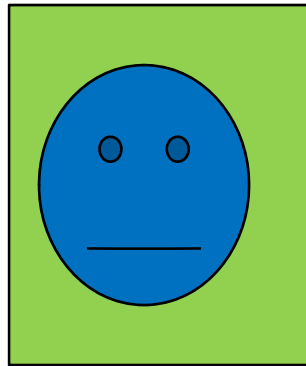
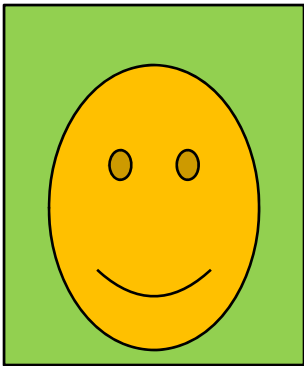
# Subtraktion

	1	2	3	4	5	6
1	0	1	2	3	4	5
2	1	0	1	2	3	4
3	2	1	0	1	2	3
4	3	2	1	0	1	2
5	4	3	2	1	0	1
6	5	4	3	2	1	0

# Multiplikation

	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>
<b>1</b>	1	2	3	<u>4</u>	5	<b>6</b>
<b>2</b>	2	<u>4</u>	<b>6</b>	8	10	<b>12</b>
<b>3</b>	3	<b>6</b>	9	<b>12</b>	15	18
<b>4</b>	<u>4</u>	8	<b>12</b>	16	20	24
<b>5</b>	5	10	15	20	25	30
<b>6</b>	<b>6</b>	<b>12</b>	18	24	30	36

# Vad tänker du på?



1

2

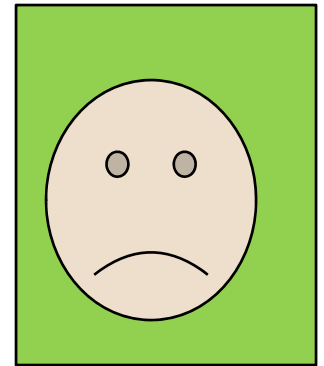
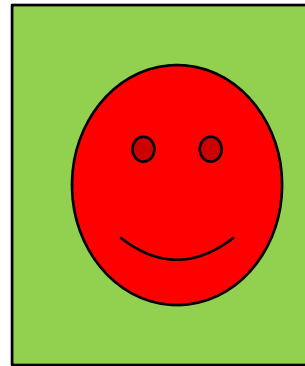
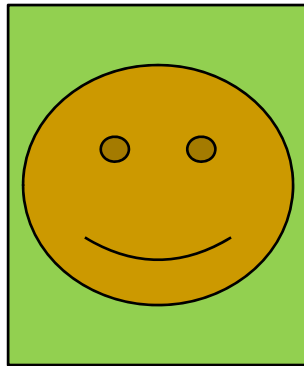
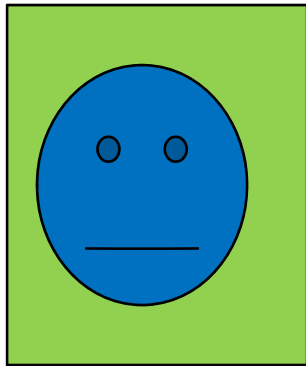
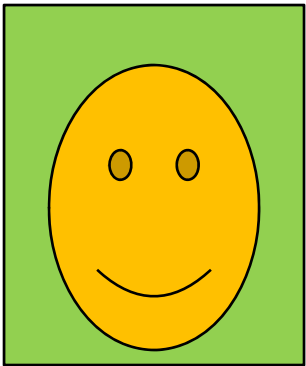
3

4

5

---

Peka på gubbe nummer ett.



1

2

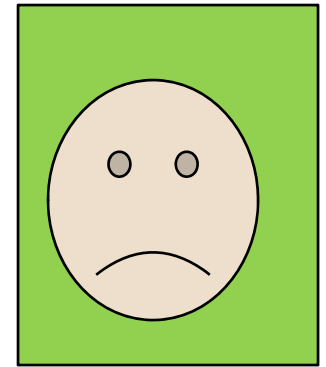
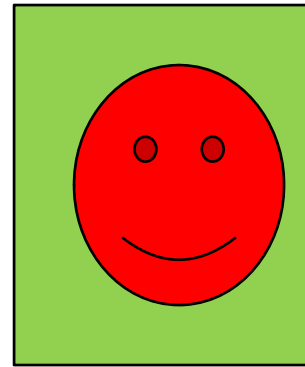
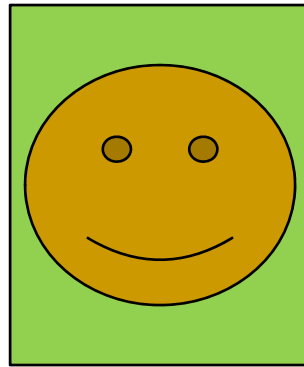
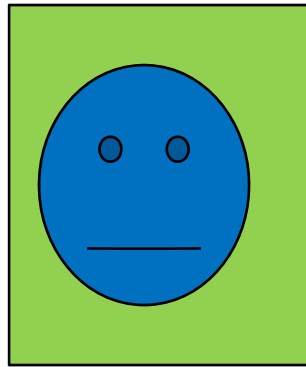
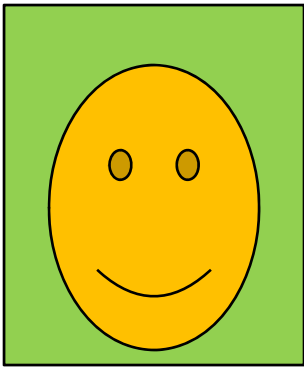
3

4

5

---

Flytta din hand 4 steg åt valfritt håll.  
(Fram och tillbaka går bra om du vill.)



1

2

3

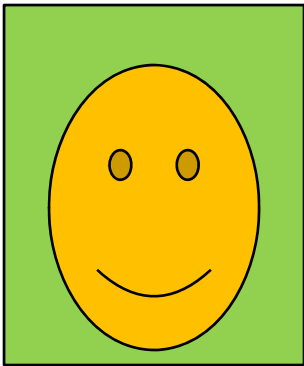
4

5

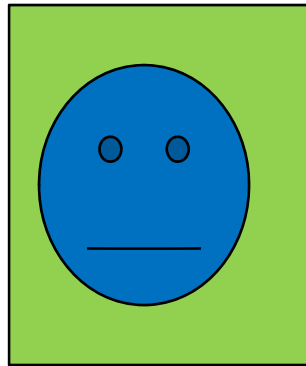


---

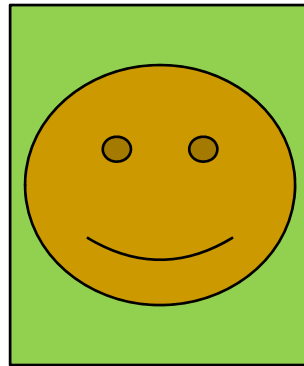
Flytta din hand ytterligare 3 steg åt  
valfritt håll.



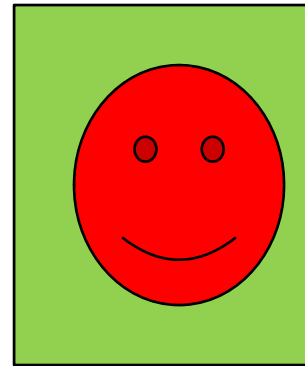
1



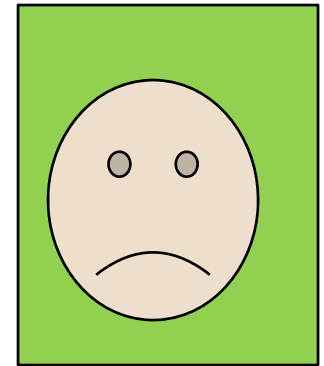
2



3



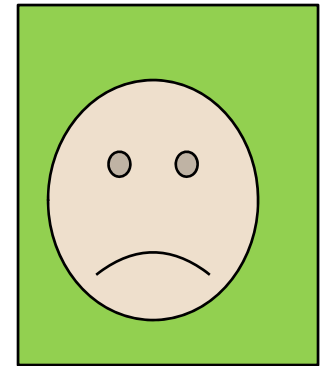
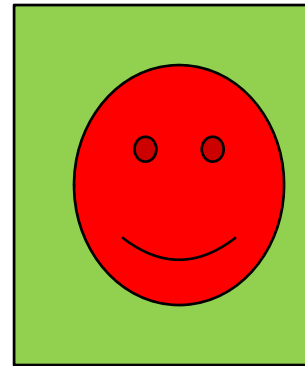
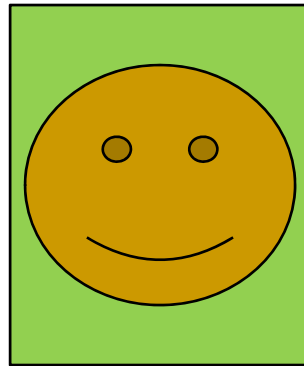
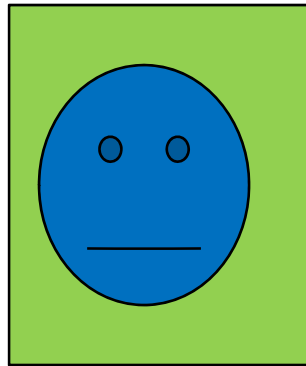
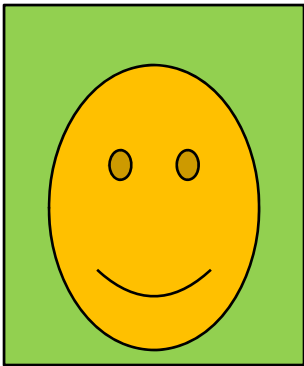
4



5

---

# Flytta valfritt antal gånger.



1

2

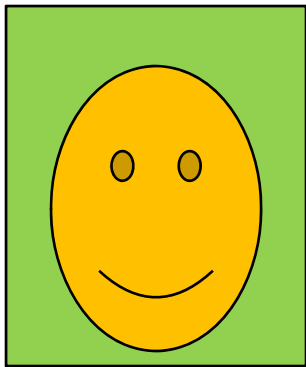
3

4

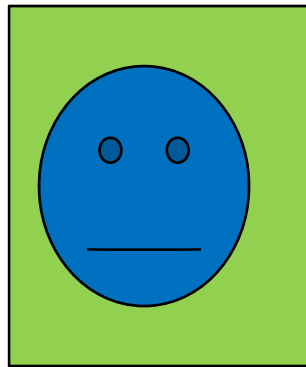
5

---

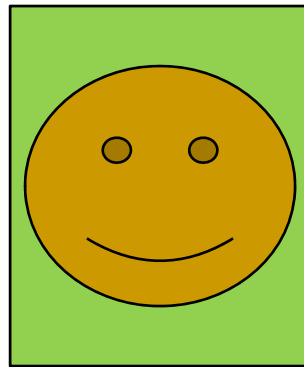
Flytta lika många steg som du nyss gjorde.



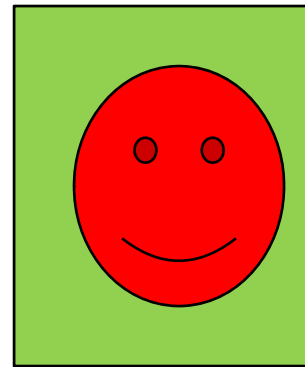
1



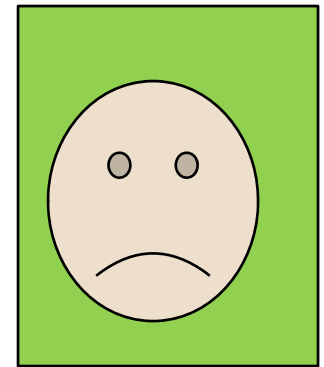
2



3



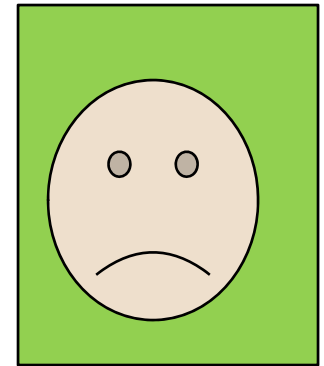
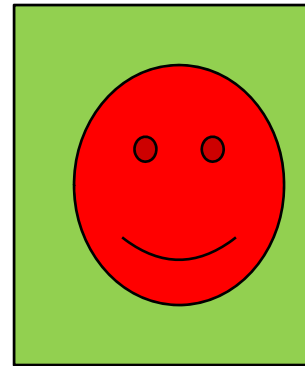
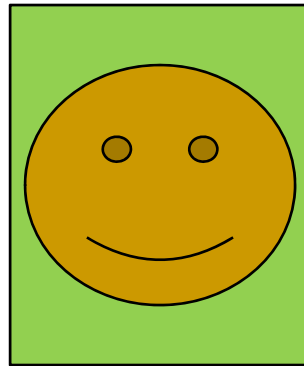
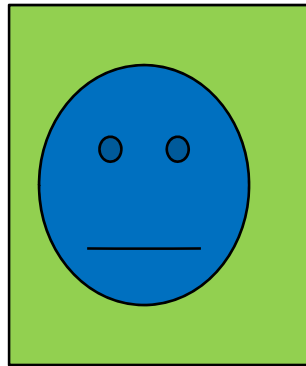
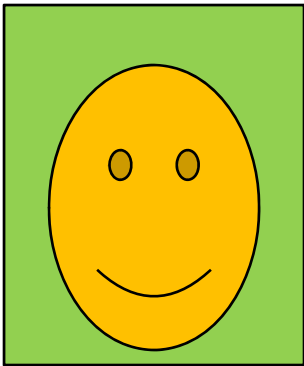
4



5

---

Om du är lärare för åk 5 eller lägre,  
flytta två steg. I annat fall stanna kvar.



1

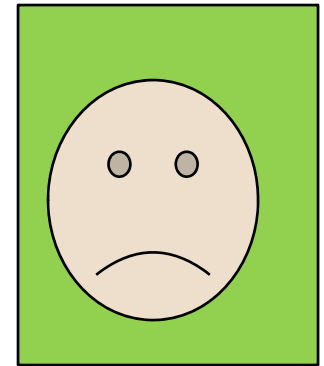
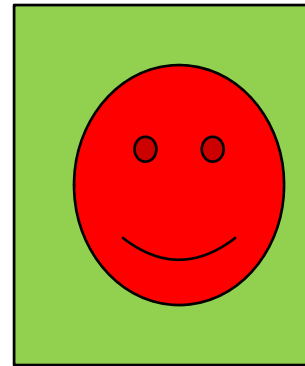
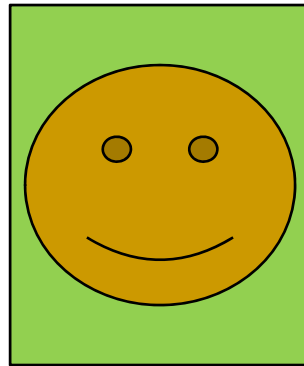
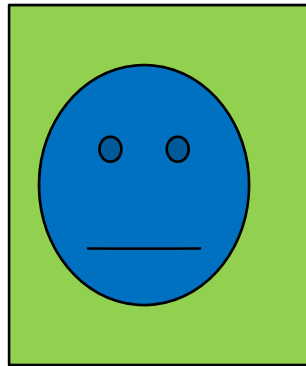
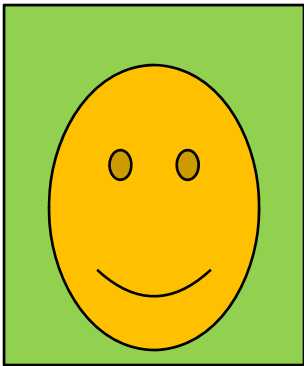
2

3

4

5

Flytta två steg åt höger.



1

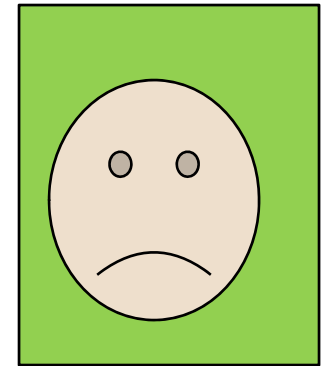
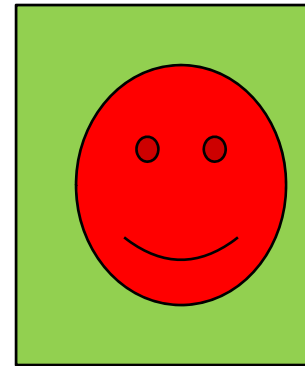
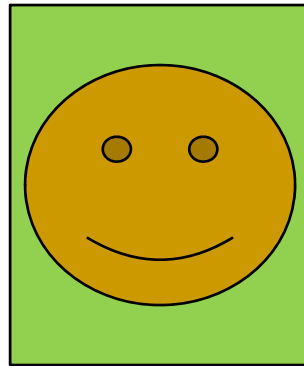
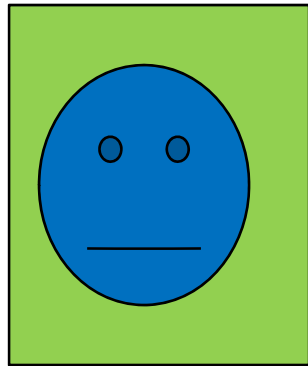
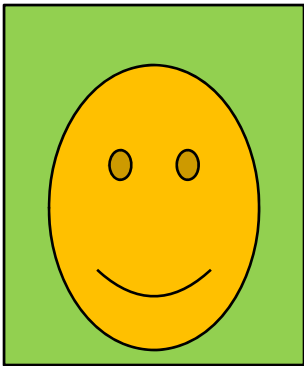
2

3

4

5

Stirra intensivt på ditt kort i 10 sekunder. Kom ihåg numret på din gubbe.



1

2

3

4

5

---

Leta upp den bokstav som motsvarar  
numret på din gubbe.

A=1

C=3

B=2

D= 4

E=5

---

---

Skriv på blädderblocket ned namnet  
på ett land som börjar på den  
bokstaven.

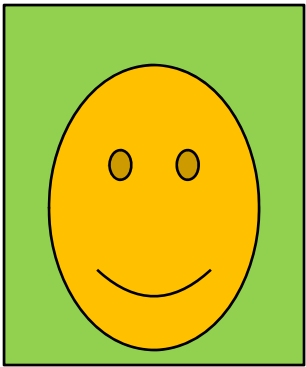
---



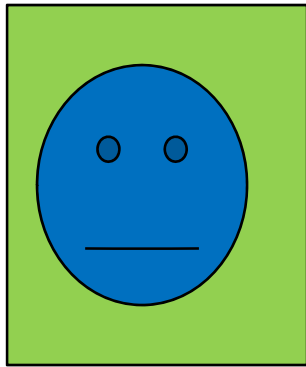
- 
1. Tänk och peka på gubbe nummer ett.
  2. Flytta ditt fokus och din pekning 4 steg åt valfritt håll.
  3. Flytta din hand och tanke ytterligare 3 steg åt valfritt håll.
  4. Flytta hand och tanke valfritt antal gånger.
  5. Flytta hand och tanke lika många steg som du nyss gjorde.
  6. Om du är lärare för åk 5 eller lägre, flytta två steg. I annat fall stanna kvar.
  7. Flytta hand och tanke två steg åt höger.
  8. Stirra intensivt på din gubbe i 10 sekunder. Kom ihåg numret på din gubbe.
-

# Peka på gubbe nummer ett.

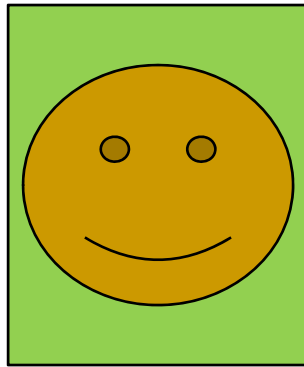
Fokusera på siffrorna som hör till gubbarna.



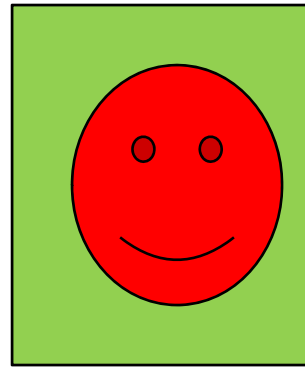
1



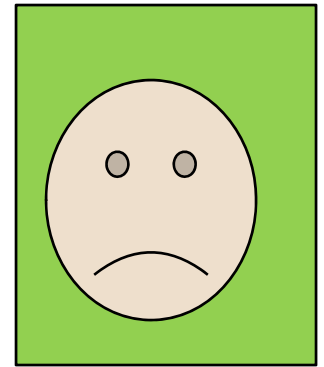
2



3



4



5

Flytta din hand 4 steg åt valfritt håll.  
(Fram och tillbaka går bra om du vill.)

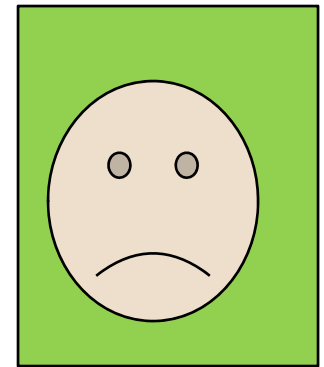
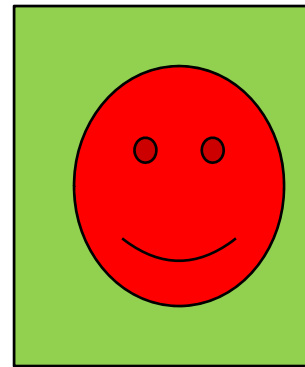
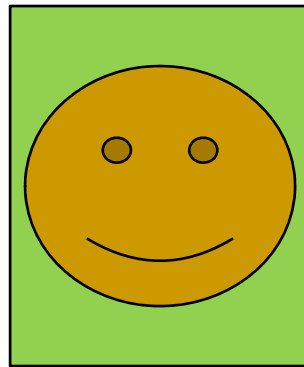
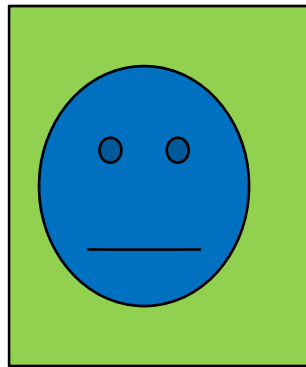
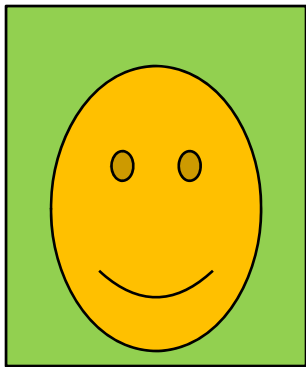
1

2

3

4

5



Notera att för varje steg så växlar jag mellan jämna och udda tal. Oavsett hur jag flyttar mina 4 steg från 1 så kommer jag att hamna på ett udda tal. (udda tal+jämmt tal ger ett udda tal). Möjliga tal 1, 3 eller 5.

Flytta din hand ytterligare 3 steg åt  
valfritt håll.

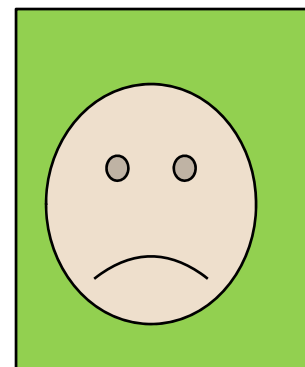
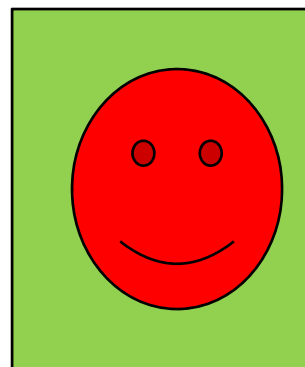
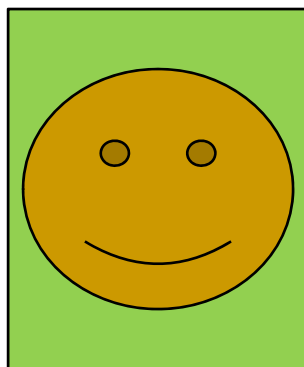
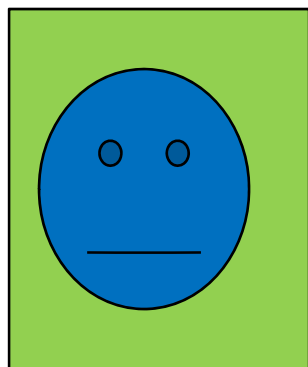
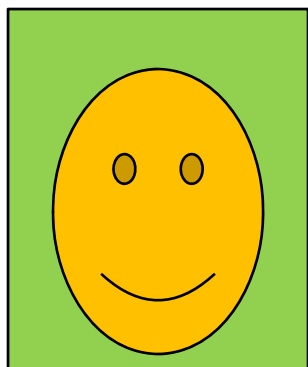
1

2

3

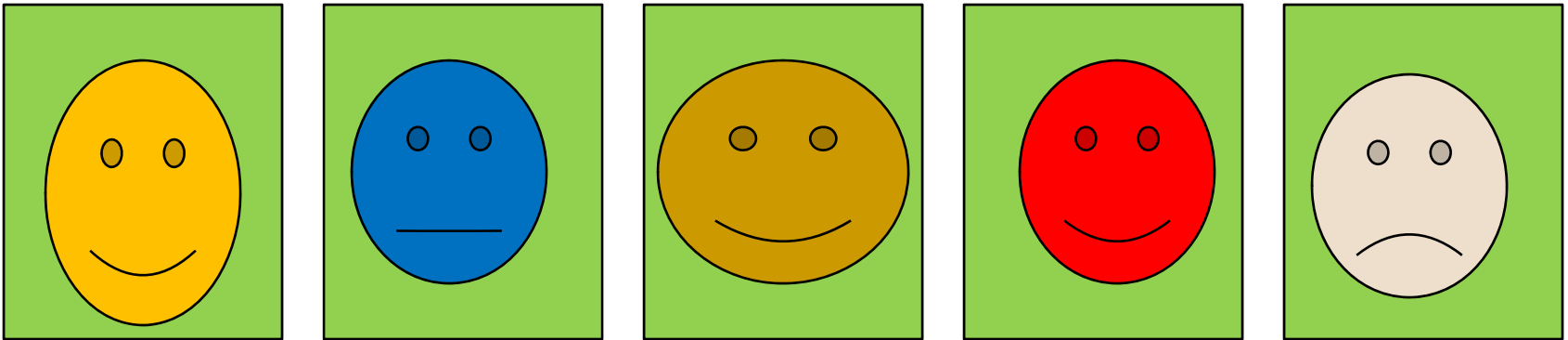
4

5



Om jag flyttar mig tre steg kommer jag att  
hamna på ett jämnt tal. (udda tal + udda tal ger  
ett jämnt tal). Möjligheter 2 eller 4.

# Flytta valfritt antal gånger.



I detta fall kan vi inte säga vilken gubbe eller vilket tal som pekas på. Möjligheter – alla!

Flytta lika många steg som du nyss gjorde.

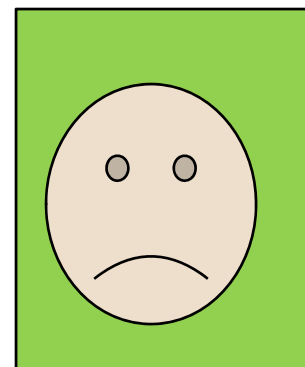
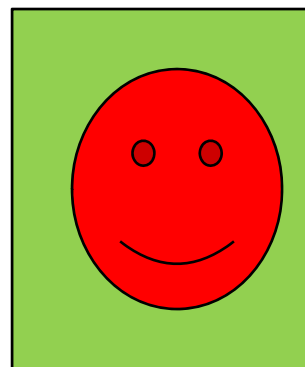
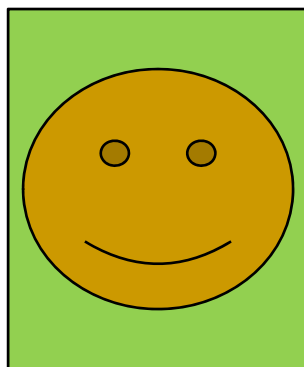
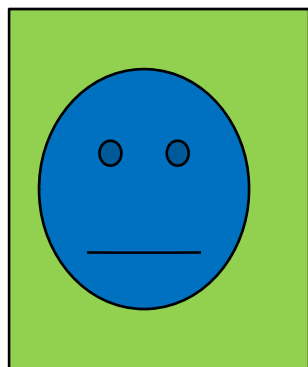
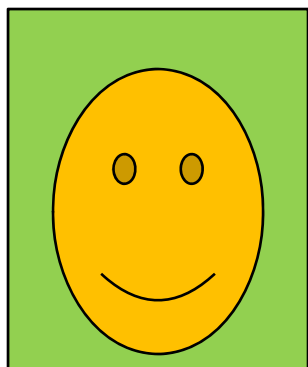
1

2

3

4

5



Genom att flytta valfritt antal steg två gånger, så vet vi att vi flyttat ett jämnt antal steg de två senaste gångerna tillsammans. Vi måste då hamna på ett jämnt tal. (jämt tal + jämnt tal ger ett jämnt tal). Möjligheter 2 eller 4.

Om du är lärare för åk 5 eller lägre,  
flytta två steg. I annat fall stanna kvar.

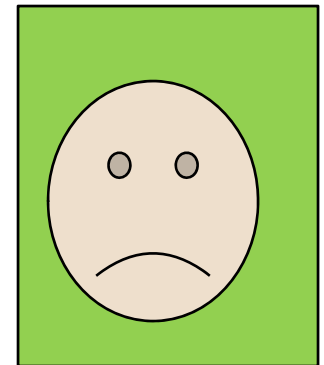
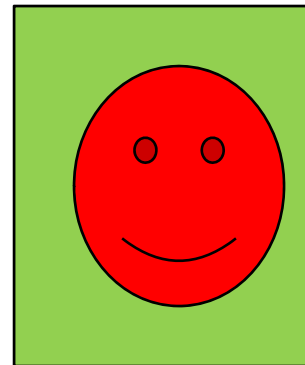
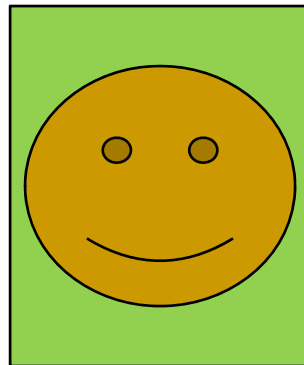
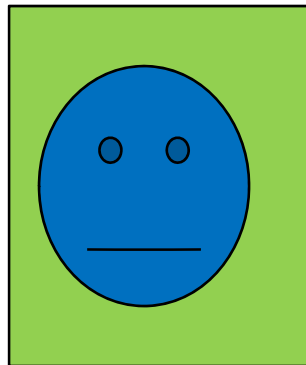
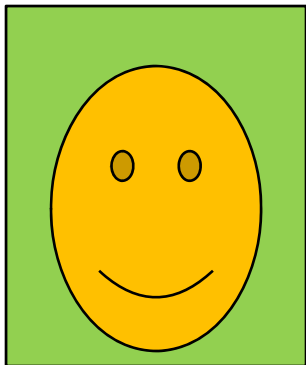
1

2

3

4

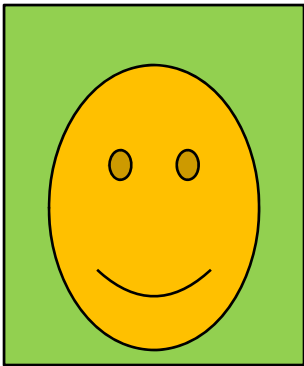
5



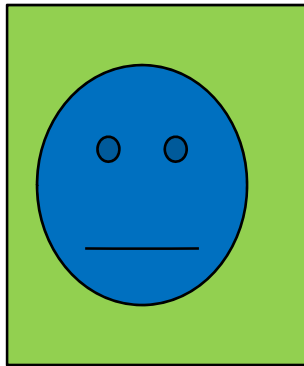
Vi hamnar återigen på ett jämnt tal. Möjligheter  
2 eller 4.

# Flytta två steg åt höger.

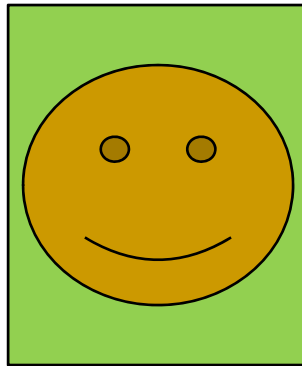
1



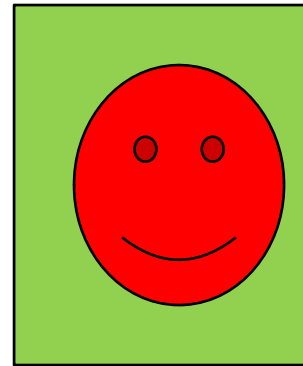
2



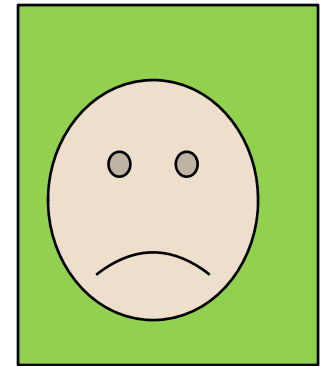
3



4



5

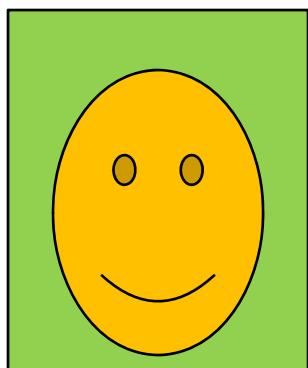


Oavsett om vi stod på 2 eller 4 inför denna sista förflyttning så står vi på 4 efter förflyttningen.  
Enda möjlighet 4.

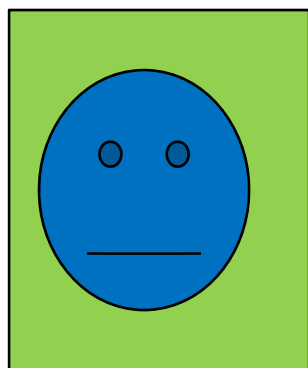


---

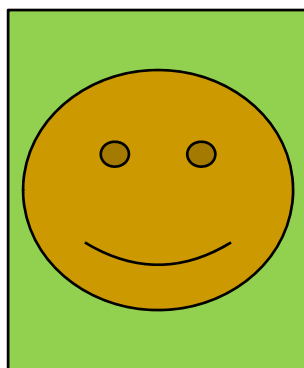
Talet 4 ger oss bokstaven D, och....



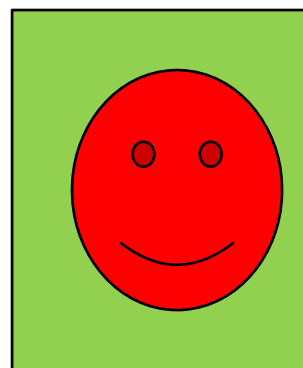
1



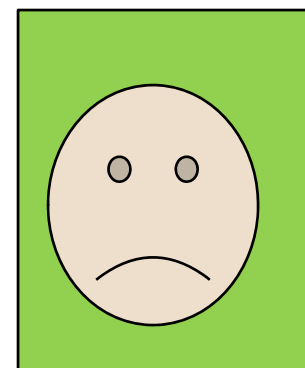
2



3



4



5

---

---

# VILDMARKSMATEMATIK

*En noggrant planerad och organiserad kurs i matematik är ibland alltför lik en fjällvandring som aldrig lämnar den markerade leden.*

*Man ser en jämn ström av uppseendeväckande scenarier. Man undviker noggsamt alla äventyr, återvändsgränder, hinder och anländer välbehållen klockan fem varje eftermiddag till en vältimrad stuga.*

*Svårighetsnivån är noga kontrollerad och det är lätt att inse att färden kommer att bli lätt och nöjsam. Tyvärr missar man därmed också upplevelsen av att välja en felaktig men spännande väg, få sova i det fria, hitta ett eget spår och insikten i att man kan komma långt på egen hand i vildmarken med intuition och kompass.*

*”Vildmarksmatematik” är en viktig del i en bra utbildning.*

*Henry Pollak*

---

---

# Välkomna att kontakta oss

Linda Mattsson

[lindam@chalmers.se](mailto:lindam@chalmers.se)

Eva Pettersson

[MatteEva@telia.com](mailto:MatteEva@telia.com)

[www.matteeva.se](http://www.matteeva.se)

[www.giftedmath.se](http://www.giftedmath.se)

---