Första hjälpen lådan

Innehåll:
Tiobasmaterial
Bråkkakor
Geobräde
Talstavar och skena(1m)
Geometriska former
Tangram
Logiska block

Som namnet antyder är materialet avsett för lärare som vill komma igång med konkretisering i matematikundervisningen. Därför är största delen av materialet avsett att användas med OH- projektor. Efter att ha prövat materialet kan läraren bestämma sig för att skaffa klassuppsättningar av de delar i materialet som intresserar henne. Det går också att tillverka material själv, men i början är det bra att få ett färdigt material.

Det är viktigt att alla nya begrepp blir klara för eleverna. Läraren är skyldig att, efter och under konkretiseringen, föra undervisningen till en teoretisk nivå. Konkretisering av matematiska begrepp ger alla elever en chans till förståelse.
Många förknippar matematikundervisning med enbart teoretiska studier. Målet är ju att eleven skall behärska det matematiska symbolspråket och matematikens regler. I grundskolan måste eleverna få jobba konkret i början, för att senare kunna förflytta sig till ett teoretiskt plan. I de högre klasserna har en del av eleverna en större förmåga att flytta sig till en teoretisk nivå än andra. För att alla elever skall kunna tillgodogöra sig undervisningen är det viktigt med konkreta modeller. Konkretisering av matematiken ger också teoretiskt tänkande elever nya insikter och berikar på så sätt också deras studier.
Vid första anblicken verkar materialet vara avsett för lågstadiet, men det kan också användas i högstadiet och gymnasiet. Att arbeta med ett konkret material har också ett värde i sig. Fantasin vaknar då man ser, rör och kan påverka materialet. Vackra former och färger ger också ett estetiskt intryck av de sköna matematiska sanningarna.

Tiobasmaterial
Grunderna för vårt talsystem, med 10 som bas, läggs tidigt. Med tiobasmaterialet kan man konkretisera talen och de fyra enkla räknesätten. Förståelsen av stora tal förenklas också om man jobbar konkret i början. I ett senare skede kan man använda material med andra baser än tio. På så sätt stadfästes förståelsen för vårt talsystem och t.ex. de binära talen.
Med tiobasmaterialet kan man utföra additioner och subtraktioner genom att lägga upp talen på ett underlag med skilda kolumner för ental, tiotal och hundratal.

Additionen 213 + 476 = 689 ställs upp på underlaget. Läraren diskuterar uppgiften med eleverna, sedan utför eleven räkningen genom att addera entalen, tiotalen och hundratalen. Det krävs inga övergångar vilket gör uppgiften lättare att klara av än den följande. Additionen 483 + 259 = 742 förklaringar mera förklaringar än den förra. Vi ställer upp uppgiften på underlaget och förklarar vad som händer när entalen blir flera än nio. Vi måste överföra tio ental till tiotalen plats. De tio entalen representeras där av ett tiotal. Efter att uppgiften lösts konkret går man till symbolspråket. Därefter kan man med fördel jobba parallellt med det konkreta och det abstrakta uppställningssättet. Språket följer naturligtvis med som en röd tråd genom hela processen. Vi får inte glömma att språket är ett viktigt verktyg i all inlärning!

Subtraktion utan ”lån” eller växling:
Uppgiften 587 – 246 utförs så att man ställer upp talet 587 på underlaget. Därefter tar man helt enkelt bort 246 från det uppställda talet. När man skall utföra 587 – 239 behövs en ny strategi. Vi behöver växla, dvs omvandla sista siffran i talet 587 till talet 17. Vid den operationen minskar tiotalssiffran från 8 till 7. Det här skedet kräver förklaringar och eftertanke. Igen kan man parallellt utföra räkningarna konkret och med symboler.

Multiplikation introduceras som upprepad addition. Uppgiften 3*132 läggs upp på underlaget som 132+132+132. Senare kan man automatisera uppgiften genom att enbart ställa upp 132 och i nedre hörnet av underlaget ange multiplikatorn 3. Samtidigt introduceras uppställningen av multiplikationen.

Till konkretisering av *stora tal* lämpar sig talkort, med skilda kort för ental, tiotal och hundratal. Talet 5742 framställs då som 5000+700+40+2 både med det konkreta tiobasmaterialet och med talkorten.

Samband mellan volymmått och litermått
Den minsta entalskuben har volymen 1 cm^3. Då man framställer talet 1000 med 10-basmaterialet får man en kub med volymen 1dm^3, vilket motsvarar en liter. Nu kan man träna sambanden mellan volymmått och ”litermått”. Man kan be eleven visa 1dl, 1cl och 1ml. Eleven får en konkret bild av att 1 cm^3 motsvarar 1ml o.s.v.

Bråkkakor
De fyra enkla räknesätten med bråktal kan vålla problem för elever ännu i gymnasiet. Det har visat sig att de inte har klart för sig varför man förlänger bråken vid addition och subtraktion. Division med bråktal vållar också problem för många. Vi konkretiserar i matematikundervisningen för att stärka förståelsen. Man behöver inte minnas *hur man gör* om man *förstår varför man gör* på ett visst sätt.
Först kan man bekanta sig med bråkkakorna. Vilka bråktal finns representerade i asken? På hur många *olika* sätt kan man bilda ett helt med askens delar?
I asken finns 9 hela ”kakor” med var sin färg. Varje ”kaka” är delad på sitt eget sätt. Det finns motsvarigheter till ett helt, ett halvt, en tredjedel, en fjärdedel, en femtedel, en sjättedel, en åttondel, en tiondel och en tolftedel.
Addition av bråktal med samma nämnare går i allmänhet bra.

$$\frac{1}{5}+\frac{3}{5}=\frac{4}{5}$$

För att kunna addera bråktal med olika nämnare bör man förlänga bråken så att de får samma nämnare. Den rosafärgade halvan ersätts av två gula fjärdedelar. Då får bråktalen en sådan form att de kan adderas:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{2}{4}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

Multiplikation
Multiplikation med bråktal leder ofta till ett svar som skall förkortas.

$$3*\frac{1}{6}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

Vi ställer upp uppgiften med tre blåa bitar, vilka representerar var sin sjättedel. Resultatet tre sjättedelar är lika stort som ett halvt. En gul bit kan läggas på de tre blåa bitarna. Förkortningen får en konkret förklaring.

Division
Till allra först utför vi divisionen $\frac{1}{2}\div 2=\frac{1}{4}$
För att förstå division med bråktal i nämnaren måste man förstå vad innehållsdivision innebär.
Då man utför divisionen $1\div\left(\frac{1}{2}\right)$ frågar man: ”Hur många gånger går $\frac{1}{2}$ i 1?” Det går att lägga två rosa delar på en röd bråkkaka. Svaret är således två.
Uppgiften $2\div\left(\frac{1}{3}\right)$ får sitt svar om man lägger fram två röda kakor och täcker dem med orangefärgade tredjedelar. Vi märker då att det behövs sex stycken orangefärgade bitar för att täcka de två helorna. Svaret är således sex.
På hur många *olika* sätt kan man bilda ett helt med askens delar?

Geobräde

När vi bekantar oss med geobrädet kan vi konstatera att det finns 10 knoppar var i tio rader på brädet. Avståndet mellan två närbelägna knoppar i en rad eller en kolumn är 1 längdenhet. På samma sätt motsvarar en ruta, avgränsad av fyra närbelägna knoppar, en areaenhet.Den största kvadrat vi kan avgränsa (med gummiband) på brädet har sidan 9 och arean 81.

Omkrets och area

Till först lägger vi upp kvadrater och rektanglar efter eget val. Omkretsen och arean bestäms för varje enskilt fall. Det är viktigt att genast få klart för sig att två rektanglar som har arean 8 kan ha sinsemellan olika omkrets.

Någon elev kanske märker att man kan avbilda kvadrater ”på snedden”. För att hunna bestämma deras area måste man vara finurlig. I ett senare skede kan man använda dessa kvadrater för att konkretisera kvadratrötter och Pythagoras sats.

Triangelns area kan introduceras genom att göra en rätvinklig triangel med basen 4 och höjden 1. Med ett annat gummiband märker man ut en rektangel med samma bas och höjd som triangeln. Det syns tydligt att rektangeln innehåller två lika stora trianglar. Triangelns area är således hälften av rektangelns area, d.v.s. $\frac{4 \cdot 1}{2} = 2$

Nu kan man fortsätta utgående från den givna triangeln. Vi bibehåller bas och höjd, men flyttar gummibandet till en annan knopp. Det finns flera trianglar med basen 4 och höjden 1. Alla sådana trianglar har lika stor area, medan omkretsen kan variera. (för att kunna bestämma omkretsen till trianglar krävs kunskaper i Pythagoras sats)

Kvadratrötter

Vi startar från en kvadrat med sidan 4. Arean är 16 ty $4 \cdot 4 = 16$. Nu förenar vi mittpunkterna på varje sida i kvadraten med varandra. Vi får en ny kvadrat med arean 16/2 = 8. Eleverna motiverar den halverade arean på olika sätt.

Nu kommer frågan: ”Hur stor är sidan i denna kvadrat?” Vi måste introducera ett nytt räknesätt.

Hur får vi sidan i den första kvadraten? Vi ser att den är 4 och att vi har startat från arean 16. Vilket är det tal som multiplicerat med sig själv är 16? Svaret är 4 och vi ger räknesättet en symbol $\sqrt{16}$ =4. Kvadratroten av 16 är 4 för att $4 * 4 = 16$. Ordet kvadratrot får också sin förklaring: ”Roten till kvadraten är ju sidan!”

Efter halveringen har vi en ny kvadrat med arean 8. Samma räknesätt måste gå att tillämpa vid bestämning av denna sida. Sidan i kvadraten är $\sqrt{8}$. Här konfronteras eleven med ett irrationellt tal. De flesta elever föreslår först ett heltal som svar. De blir ställda då de inser att det inte finns ett lämpligt heltal som svar. Vi får nöja oss med $\sqrt{8}$ och ett närmevärde 2,8.

Nu fortsätter vi med en ny kvadrat. Igen sammanbinder vi mittpunkterna på den föregående kvadratens sidor. Den nya kvadraten har arean 4 och sidan 2. Slutligen gör vi en kvadrat med arean 2. Den har sidan $\sqrt{2}$. Vi kan konstatera att sidan i den andra kvadraten, $\sqrt{8}$, är dubbelt så lång som sidan i denna kvadrat. Då gäller att $\sqrt{8} = 2 \cdot \sqrt{2}$.

Färgstavar

För att kunna använda färgstavarna på ett mångsidigt sätt är det viktigt att man jobbar med deras inbördes förhållanden. Man använder en stav som mått då man mäter en annan. En klarröd stav är dubbelt så lång som en ljusröd stav, medan en mörkröd stav är 4 gånger så lång som den ljusröda. Om vi väljer en vit stav till enhet motsvaras talet 4 av en klarröd stav. Om däremot en rosa stav är enhet motsvaras talet 4 av en mörkröd. Vi kan ställa frågor som

- om en rosa stav motsvarar 1, hur ser då talet 3 ut?
- spjälk upp talet 4 på alla sätt det går
- om den mörkröda motsvarar 1, vilket tal motsvarar då den rosa?

På så sätt kommer bråktalen in i bilden. Färgstavarna är ett mångsidigt material.

Addition och multiplikation kan konkretiseras med färgstavar. Då avslöjas däremot stavarnas riktiga längd eftersom skenan är graderad i centimeter. Med hjälp av en tallinje, anpassad för färgstavarna, kan eleven se hur additioner växer fram. Man radar färgstavar av olika längd och färg i skenan. Varje stav konkretiserar ett tal. Summan av två tal avläses på talskenan. För att konkretisera multiplikationen $3 \cdot 5$ radar man tre stycken stavar med längden fem. Svaret avläses vid den femte stavens slut.
Om man vill öva multiplikationstabeller kan man rada stavar av en viss längd, börjande från en ända upp till tio stycken. Resultatet avläses för varje ny stav som läggs till.

De ungerska färgstavarna i materialet har dessutom en annan pedagogisk egenskap. Deras densitet är $1\mathrm{g}/cm^3$, dvs. samma som vattnets densitet. Med en våg kan man därför kolla sina resultat vid olika räkneuppgifter. Varje färgstav väger lika många gram som sin längd given i enheten cm.

Geometriska former

I satsen ingår gröna liksidiga trianglar, röda trapets, gula regelbundna sexhörningar, vita och blåa romber samt orangefärgade kvadrater. Vi kan bekanta oss med formerna och fundera över sidornas längder och vinklarnas storlekar. Därefter kan vi bestämma att den gula sexhörningens area är 1. Hur stora är då de övriga delarnas areor? Triangelns, trapetsets och den blåa rombens areor är bråkdelar av den gula sexhörningens area. Den vita rombens och kvadratens areor kan inte beskrivas som bråkdelar av sexhörningens area. De representerar irrationella tal.
Eleverna kan bygga vackra, symmetriska figurer med bitarna. Vinklarna är valda så att alla bitar passar ihop med de andra. Man kan märka att sexhörningarna fyller planet. Den formen används av bin, då de bygger sina insamlingskärl för honung. Likformiga figurer kan åstadkommas på många sätt. Man kan sätta fram en triangel och bredvid sammanfoga fyra trianglar till en stor likformig figur. Då ser vi att sidorna förhåller sig som 1:2, medan areorna förhåller sig som 1:4.

Därefter kan vi bygga en figur, likformig med en gul sexhörning, i skalan 1:2. Då märker vi att den nya sexhörningens area också är fyra gånger så stor som den givnas.

Tangram

En legend berättar att en kinesisk prins fällde sin kvadratiska spegel i golvet varvid den gick i 7 bitar. Bitarna hade formen av 1 kvadrat, 1 parallellogram, 2 stora trianglar, 1 medelstor triangel och 2 små trianglar. Den stackars prinsen lyckades inte bygga ihop sin spegel igen. Den första uppgiften, när man bekantar sig med tangram, är därför att försöka hjälpa prinsen med att sammanfoga alla bitarna till en kvadrat. Sedan kan man bygga mindre kvadrater innehållande fyra bitar. Det går att göra på flera olika sätt. Man kan träna procentbegreppet genom att be eleverna bygga kvadrater vilkas areor är 50%, 25% respektive 12,5% av den ursprungliga kvadratens area.

För elever som känner till begreppet kvadratrot kan man ge följande uppgift:

Arean av parallellogramen bestäms till 1. Därefter skall eleven bestämma areorna för alla övriga delar. Slutligen bestämmer man också sidornas längder.

Om man vill diskutera geometriska sanningar, så får eleverna tillverka ett eget tangram genom att vika och sedan klippa ett papper. Man måste tänka sig noga för när man viker för att man skall få ett vackert resultat och för att kunna motivera vikningarna.

Logiska block

Ungerska skolelever bekantar sig med logiska block från första skolåret. Man kan öva logiska begrepp med hjälp av en ask innehållande bitar med

3 former, 4 färger, 2 storlekar och 2 typer av hålighet.

Totalt ger det 48 bitar.

Mängdläran kan introduceras hos små barn genom att de ordnar alla blåa bitar i en mängd och alla cirklar i en annan mängd. Hastigt märker någon elev att det blir problem med de blå cirklarna. Till vilken mängd hör de? Då kan läraren förklara begrepp som senare benämns *snitt* och *union*.

Om man jobbar med små barn kan man gömma en bit ur serien utan att visa dem vilken. Sedan får de ställa frågor som kan besvaras med svaren ”jo” eller ”nej” . Läraren för bok på tavlan över givna svar. När det rätta antalet frågor är ställda och besvarade skall eleverna kunna ange den utvalda biten.

Man kan också be eleverna rada bitarna efter varandra så att endast en egenskap byter åt gången. Som variation kan man be eleverna bilda cirklar med tre, fyra eller fem bitar där en egenskap förändras vid varje steg.

Mängdläran kan introduceras hos små barn genom att de ordnar alla blåa bitar i en mängd och alla cirklar i en annan mängd. Hastigt märker någon elev att det blir problem med de blå cirklarna. Till vilken mängd hör de? Då kan läraren förklara begrepp som senare benämns *snitt* och *union*.

Om man funderar på *antalet bitar i asken* så kan följande frågor vara intressanta:

Hur många bitar innehåller asken om man inför en femte färg? Vad händer med antalet om man inför fyra former. Man kan komma till rätt svar genom att tänka på många olika sätt. En diskussion om olika tänkesätt är alltid viktig!